Bayerische Julius-Maximilians-Universität Würzburg

Mathematisches Institut

Gruppen mit kleinen Zentralisatorschranken

Diplomarbeit

von

Christian Weiß

Betreuer: Prof. Dr. Hermann Heineken

Juli 2002

Detail aus einem Holzschnitt von Artemio Rodriguez

Ihr seid da auf der rechten Spur,
Doch müsst Ihr Euch nicht zerstreuen lassen.
Mein teurer Freund, ich rat Euch drum,
Zuerst Collegium Logicum.
Da wird der Geist Euch wohl dressiert,
In Spansche Stiefeln eingeschnürt,
Dass er bedächtger so fortan
Hinschleiche die Gedankenbahn,
Und nicht etwa die Kreuz und Quer
Irrlichteliere den Weg daher.

(Johann Wolfgang von Goethe, „Urfaust“)

Vorwort

Als Ausgangspunkt dieser Arbeit mag folgender Satz aus Huppert [4], Seite 30, gelten:

> „ **6.6 Satz.** *Sei $\mathfrak{H}$ eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$ vom Index n. Dann besitzt $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler $\mathfrak{N}$ mit $n \mid |\mathfrak{G}/\mathfrak{N}|$ und $|\mathfrak{G}/\mathfrak{N}| \mid n!$.* “

Dieser Satz besagt, dass aus der Existenz einer Untergruppe eines gewissen Index $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines Normalteilers vom Index $n \cdot m$ folgt, wobei m ein Teiler von $(n-1)!$ ist. Doch was ist, wenn an Stelle einer gewöhnlichen Untergruppe ein Zentralisator des Index n vorliegt, oder noch strenger, wenn zudem alle weiteren Zentralisatoren ebenfalls nur Indizes von maximal n besitzen? Lässt sich dann die obige Schranke $n \cdot m$ verschärfen?

Damit sind wir beim Begriff der Zentralisatorschranke angelangt: Gelten in einer Gruppe die eben angeführten Bedingungen für alle Zentralisatoren, so spricht man von einer Gruppe mit *Zentralisatorschranke n*.

Diese Gruppen gilt es nun genauer zu untersuchen. Ein Augenmerk wird dabei natürlich auf der Präzision der Beschränkung $n \cdot m$ liegen, aber es wird auch die Frage zu erörtern sein, ob sich aus einer gegebenen Zentralisatorschranke möglicherweise Aussagen bezüglich Auflösbarkeit oder Nilpotenz, bezüglich der Struktur der Kommutatorgruppe ableiten lassen.

Es dürfte dabei wenig überraschen, dass die Wahl der Zentralisatorschranke ganz entscheidenden Einfluß auf die Beantwortung der eben gestellten Fragen nehmen wird. So wird in dieser Arbeit mit der Untersuchung von Gruppen begonnen werden, deren Zentralisatorschranke eine Primzahl ist, um diese Überlegungen anschließend auf ein Primquadrat als Zentralisatorschranke auszudehnen.

Während der erste Abschnitt noch weitestgehend mit elementaren Kenntnissen der Gruppentheorie auskommt, erfordert der zweite Teil wesentlich aufwendigere und tiefergehende Überlegungen. Darin wird sowohl eine ausführliche Diskussion der p-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_{p^2} einfließen, wie auch der Theorie der p-Gruppen ein großes Gewicht beigemessen werden wird.

Mein ganz besonderer Dank geht zunächst an Herrn Prof. Dr. Hermann Heineken für die interessante Themenstellung und die freundliche Betreuung, für die hilfreichen Diskussionen und Anregungen zur Gestaltung dieser Arbeit.

Zudem danke ich den Herren Marcel Schuster und Matthias Wölfling, Ersterem, weil er mir sehr wertvolle Hinweise zur Benutzung des Satzsystems LaTeX gab, Zweiterem, weil er sich die Mühe machte und große Teile meiner Arbeit Korrektur las.
Auch möchte ich an dieser Stelle meinen Eltern und Großeltern danken, die mich während meines Studiums stets unterstützten.

Ein ganz herzlicher Dank sei indes an meine Freundin Miia gerichtet, welche nicht nur meine Arbeit unter germanistischen Gesichtspunkten unter die Lupe nahm, sondern mir insbesondere jederzeit Mut zusprach, wenn ich an scheinbar unlösbaren mathematischen Problemen verzweifelte, und die es verstand, mich am Morgen aufzumuntern, wenn ich die Nacht über mal wieder von Kommutatoren der Länge 4 geträumt hatte.

Würzburg, im Juli 2002 Christian Weiß

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

Im folgenden Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen und Aussagen zusammengestellt, die dem Leser zumeist geläufig sein sollten. Diese Grundlagen werden aus zwei Gründen angeführt: Einerseits soll der Leser mit der hier verwendeten Schreibweise bekannt gemacht werden, andererseits wird im Verlauf dieser Diplomarbeit immer wieder auf diese Aussagen zurückgegriffen.

1.1 Definitionen

Wird in diesem Abschnitt ein Satz ohne Beweis angegeben, so kann dieser in einem Standard-Lehrbuch der Algebra nachgelesen werden, insbesondere in Meyberg [6]. Allerdings sollten die Aussagen dieses Abschnittes dem Leser ohnehin vertraut sein.

1.1.1 Definition Sei G eine Gruppe, U eine Teilmenge aus G, die mit der Verknüpfung aus G selbst eine Gruppe bildet. Dann bezeichnet man U als eine *Untergruppe* von G und schreibt kurz: $U \preceq G$, bzw. $U \prec G$, wenn $U \neq G$ gilt.

1.1.2 Definition Sei G eine Gruppe, M eine Untergruppe von G.
M heißt *maximale Untergruppe* von G, wenn für jede Untergruppe U von G mit $M \preceq U \preceq G$ resultiert, dass $U \equiv M$ oder $U \equiv G$ ist.

1.1.3 Definition Es sei G eine Gruppe, $S \subseteq G$ eine Teilmenge aus G.
Die Gruppe $\langle S \rangle := \bigcap\{U | U \preceq G \textit{ mit } S \subseteq U\}$ heißt die von S *erzeugte Untergruppe* von G.
Ist $G = \langle S \rangle$, dann nennt man G *von S erzeugt* und S ein *Erzeugendensystem* von G.
G ist *endlich erzeugt*, wenn es ein endliches Erzeugendensystem $\{a_1, ..., a_n\} \subseteq G$ gibt, also $G = \langle a_1, ..., a_n \rangle$ gilt. Wird G von einem Element erzeugt, so heißt G *zyklisch*.

Die Struktur eines solchen Erzeugnisses lässt sich nun noch etwas genauer angeben:

1.1.4 Satz Sei G eine Gruppe, S eine nichtleere Teilmenge aus G, dann besteht $\langle S \rangle$ aus allen endlichen Produkten von Elementen aus $S \cup S^{-1}$, d.h. es gilt:

$$\langle S \rangle = \{x_1 x_2 \cdots x_n | x_i \in S \cup S^{-1}, n \in \mathbb{N}\}.$$

1.1.5 Definition Die Zahl der verschiedenen Rechtsnebenklassen einer Untergruppe U von G bezeichnet man als *Index* von U in G und schreibt kurz: $|G : U|$.

Hierzu können nun eine Reihe von Aussagen gemacht werden, die im Anschluß kurz aufgelistet seien:

1.1.6 Satz (LAGRANGE) Sind für eine Untergruppe U von G je zwei der Größen $|U|$, $|G|$ oder $|G:U|$ endlich, dann sind alle drei endlich und es gilt: $|G| = |G:U| \cdot |U|$.

1.1.7 Korollar Ist G eine Gruppe mit Primzahlordnung, so ist G zyklisch.

1.1.8 Satz Seien U und V Untergruppen von G und sei $U \subseteq V$. Sind zwei der Größen $|G:U|$, $|G:V|$ oder $|V:U|$ endlich, so auch die dritte und es gilt: $|G:U| = |G:V| \cdot |V:U|$.

1.1.9 Definition und Satz Man nennt eine Untergruppe U von G einen *Normalteiler*, wenn für alle $g \in G$ stets $gUg^{-1} \subseteq U$ erfüllt ist und schreibt kurz: $N \trianglelefteq G$, bzw. $N \triangleleft G$, falls $N \neq G$ gilt.
Dazu sind äquivalent:
(i) $gUg^{-1} = U$ für alle $g \in G$. (ii) $gU = Ug$ für alle $g \in G$. (iii) $gU \subseteq Ug$ für alle $g \in G$.

Normalteiler werden auf Grund obiger Eigenschaften auch oft als *invariante Untergruppen* bezeichnet. Außerdem muss man bei Normalteilern offensichtlich nicht zwischen Links- und Rechtsnebenklassen unterscheiden, was die Einführung eines weiteren Begriffes, der *Faktorgruppe*, ermöglicht. Doch zuvor soll ein anderer Terminus behandelt werden, der zeigt, wie weit eine beliebige Untergruppe von einem Normalteiler „entfernt“ ist.

1.1.10 Definition Sei G eine Gruppe, $X \subseteq G$ eine Teilmenge aus G, dann heißt die Untergruppe $N_G(X) := \{g \in G | gX = Xg\} = \{g \in G | gXg^{-1} = X\}$ der *Normalisator* von X in G.

1.1.11 Satz Die Anzahl der verschiedenen Konjugierten einer Teilmenge S von G ist gleich dem Index des Normalisators von S in G.

Beweis: Siehe Hall [1], Seite 14. #

1.1.12 Definition und Satz Sei N ein Normalteiler von G, dann heißt $G/N := \{gN | g \in G\}$ die Menge aller Nebenklassen und bildet zusammen mit der Multiplikation $(aN)(bN) := (ab)N$ eine Gruppe, die sog. *Faktorgruppe* von G nach N. Des Weiteren gelten:
(i) $|G/N| = |G:N|$
(ii) Sind je zwei der Größen $|G|$, $|N|$ oder $|G/N|$ endlich, so auch die dritte, und es ist $|G| = |G/N| \cdot |N|$.

1.1.13 Definition Sei G eine Gruppe, dann heißt $Z(G) := \{g \in G | gx = xg \ \forall x \in G\}$ das *Zentrum* von G.

Das Zentrum kann also als Maß dafür betrachtet werden, wie weit eine Gruppe davon „entfernt“ ist, eine abelsche Gruppe zu sein. Ein anderes Maß dafür wäre:

1.1.14 Definition Sei G eine Gruppe, $x \in G$ ein beliebiges Gruppenelement von G, dann bezeichnet man $C_G(x) := \{g \in G | gxg^{-1} = x\}$ als den *Zentralisator* von x in G.

1.1.15 Korollar Sei G eine Gruppe und $x \in G$ beliebig, dann ist $C_G(x) = N_G(x)$.

Beweis: Folgt direkt aus den Definitionen 1.1.10 und 1.1.14. #

1.1.16 Definition Das *(äußere) direkte Produkt* von Gruppen G_1, ..., G_n ist definiert als

$$G_1 \otimes \cdots \otimes G_n := \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in G_i \text{ für alle } i = 1, ..., n\} =: \bigotimes_{i=1}^{n} G_i$$

.

1.1.17 Definition Die Gruppe G ist das *innere direkte Produkt* von Normalteilern N_1, ..., N_n von G, wenn erfüllt sind:
(i) $G = N_1 N_2 \cdots N_n$,
(ii) $N_i \cap N_1 \cdots N_{i-1} N_{i+1} \cdots N_n = \{e\}$, für $1 \leq i \leq n$ und e dem neutralen Element von G.

Die zwei folgenden Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen inneren und äußeren direkten Produkten her, so dass zukünftig nur noch von direkten Produkten gesprochen werden soll.

1.1.18 Satz Seien G_1, ..., G_n Gruppen, sei $E_j := \{e_j\}$ die triviale Gruppe zur Gruppe G_j, $1 \leq j \leq n$, sei $G'_i := E_1 \otimes \cdots \otimes E_{i-1} \otimes G_i \otimes E_{i+1} \otimes \cdots \otimes E_n$. Dann ist das äußere direkte Produkt $G := G_1 \otimes \cdots \otimes G_n$ gleich dem inneren direkten Produkt $G = G'_1 \cdots G'_n$ mit $G'_i \cong G_i$.

1.1.19 Satz Sei $G = N_1 \cdots N_n$ ein inneres direktes Produkt der Normalteiler N_1, ..., N_n von G, und sei N_i isomorph zu einer Gruppe G_i für alle $i = 1, ..., n$, dann ist G isomorph zum äußeren direkten Produkt $\bigotimes_{i=1}^{n} G_i$.

1.1.20 Satz (Bezout) Seien $m, n \in \mathbb{N}$ teilerfremde, natürliche Zahlen (d.h. $ggT(m, n) = 1$), dann gilt: Es existieren Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $1 = \alpha m + \beta n$ ist.

1.1.21 Satz Sei p eine Primzahl, G eine Gruppe mit $|G| = p^2$, dann ist G abelsch.

1.2 Auflösbare und nilpotente Gruppen

1.2.1 Definition Man bezeichnet eine Gruppe G als *auflösbar*, wenn es eine sog. endliche Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq ... \supseteq N_r = \{e\}$ mit N_{i-1}/N_i abelsch für alle $i = 1, ..., r$ gibt (abelsche Normalreihe).

1.2.2 Definition Sei G eine Gruppe, seien $a, b \in G$. $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ ist der *Kommutator* von a und b. $[G, G] := \langle\{[a, b] | a, b \in G\}\rangle$ heißt die *Kommutatorgruppe* von G.
Die Kommutatorbildung kann iteriert werden, man definiert rekursiv:

$$G' := [G, G] \text{ und } G^{(n+1)} := [G^{(n)}, G^{(n)}].$$

1.2.3 Korollar Eine Gruppe ist genau dann abelsch, wenn ihre Kommutatorgruppe nur aus dem neutralen Element besteht.

Beweis: Folgt direkt aus der Definition des Kommutators. #

Die drei folgenden Aussagen findet man in Meyberg [6], Seite 92:

1.2.4 Satz Die Kommutatorgruppe G' einer Gruppe G ist ein Normalteiler von G.

1.2.5 Satz Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G, dann gilt:
Die Faktorgruppe G/N ist abelsch genau dann, wenn die Kommutatorgruppe G' in N enthalten ist.

1.2.6 Korollar Für eine jede Gruppe G ist G/G' abelsch.

1.2.7 Definition und Satz Eine Gruppe G ist auflösbar, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^{(m)} = \{e\}$. Die kleinste natürliche Zahl k mit $G^{(k)} = \{e\}$ nennt man *Stufe* von G.
Die triviale Gruppe $\{e\}$ erhält die Stufe 0. Offensichtlich sind Gruppen der Stufe 1 abelsch, Gruppen der Stufe 2 bezeichnet man als *metaabelsch*.

Beweis: Siehe Meyberg [6], Seite 93f. #

1.2.8 Definition Eine Gruppe G wird *nilpotent* genannt, wenn es eine endliche Normalreihe $G = N_0 \supseteq N_1 \supseteq ... \supseteq N_r = \{e\}$ gibt mit $N_{i-1}/N_i \subseteq Z(G/N_i)$ für alle $i = 1, ..., r$.

1.2.9 Satz Mit einer nilpotenten Gruppe G ist auch jede Untergruppe und Faktorgruppe von G nilpotent.

Beweis: Siehe Huppert [4], Seite 261, wobei Huppert die Aussage nicht nur für Faktorgruppen, sondern allgemein für ein beliebiges homomorphes Bild von G zeigt. #

1.2.10 Satz Eine endliche Gruppe ist nilpotent genau dann, wenn ihre maximalen Untergruppen Normalteiler sind.

Beweis: Siehe Wielandt [7]. #

1.2.11 Definition Sei G eine Gruppe.
(i) Die durch $G =: \mathcal{K}_1(G) \succeq \mathcal{K}_2(G) \succeq ...$ mit $\mathcal{K}_{i+1}(G) := [G, \mathcal{K}_i(G)]$ definierte Kette heißt *absteigende Zentralreihe* von G.
Dabei ist insbesondere $\mathcal{K}_2(G) = G'$ und $\mathcal{K}_3(G) = [G, G']$.
(ii) Die durch $\{e\} =: \mathcal{Z}_0(G) \preceq \mathcal{Z}_1(G) \preceq \mathcal{Z}_2(G) \preceq ...$ definierte Kette, wobei $\mathcal{Z}_1(G) := Z(G)$ und $\mathcal{Z}_{i+1}(G)$ bestimmt ist durch $\mathcal{Z}_{i+1}(G)/\mathcal{Z}_i(G) = Z(G/\mathcal{Z}_i(G))$, bezeichnet man als *aufsteigende Zentralreihe* von G.

1.2.12 Definition und Satz Sei G eine Gruppe, dann sind äquivalent:
(i) G ist nilpotent.
(ii) Die absteigende Zentralreihe von G endet nach endlich vielen Schritten in $\{e\}$:

$$G = \mathcal{K}_1(G) \succeq \mathcal{K}_2(G) \succeq ... \succeq \mathcal{K}_{r+1}(G) = \{e\}.$$

(iii) Die aufsteigende Zentralreihe von G endet nach endlich vielen Schritten in G:

$$\{e\} = \mathcal{Z}_0(G) \preceq \mathcal{Z}_1(G) \preceq ... \preceq \mathcal{Z}_c(G) = G.$$

In jedem Fall ist dann $r = c$. Man nennt c die *Klasse* von G.

Beweis: Für endliche Gruppen ist die Aussage bewiesen in Huppert [4], Seite 260ff, allerdings bemerkt Huppert, dass aus $\mathcal{K}_n(G) = \{e\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ stets Nilpotenz folgt. Da in Hall [1], Seite 151, die Richtung (i) $\Longrightarrow$ (ii), (iii) auch für unendliche Gruppen gezeigt wird, entfällt eine Einschränkung auf Endlichkeit völlig. #

1.3 Homomorphismen

Die Sätze in diesem und im anschließenden Abschnitt werden ohne Beweis angegeben, welche jedoch in einem Standard-Lehrbuch der Algebra nachgelesen werden können, insbesondere in Meyberg [6]. Allerdings sollten die Aussagen dieses Abschnittes dem Leser schon vertraut sein.

1.3.1 Satz (Homomorphiesatz) Ist $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann gilt, dass $G/Kern(\varphi)$ isomorph zu $\varphi(G)$ ist, kurz:

$$G/Kern(\varphi) \cong \varphi(G).$$

1.3.2 Satz (Erster Isomorphiesatz) Sei G eine Gruppe, U eine Untergruppe von G und N ein Normalteiler von G, dann ist UN eine Untergruppe von G, $U \cap N$ ein Normalteiler von U und es ist erfüllt:

$$UN/N \cong U/(U \cap N).$$

1.3.3 Satz (Zweiter Isomorphiesatz) Für Normalteiler U, V einer Gruppe G mit $U \subseteq V$ ist V/U ein Normalteiler von G/U und es gilt:

$$(G/U)/(V/U) \cong G/V.$$

1.4 Die Sylowschen Sätze

1.4.1 Satz (Erster Sylowscher Satz) Sei G eine endliche Gruppe von der Ordnung $n = p^r m$ $(r \geq 1)$ mit einer Primzahl p, die m nicht teilt ($p \not| \, m$ bzw. $ggT(p, m) = 1$), dann gibt es für alle $1 \leq s \leq r$ eine Untergruppe der Ordnung p^s (also eine p-Gruppe).

1.4.2 Satz (Zweiter Sylowscher Satz) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^r m$ $(r \geq 1)$, mit einer Primzahl p und $p \not| \, m$, und sei P eine p-Sylowgruppe (also $|P| = p^r$), dann enthält P von jeder p-Untergruppe U von G eine Konjugierte (es existiert also ein $g \in G$ mit $gUg^{-1} \subseteq P$).

1.4.3 Korollar In einer endlichen Gruppe der Ordnung $p^r m$ $(r \geq 1)$, mit einer Primzahl p und $p \not| \, m$, gilt:
(i) Je zwei p-Sylowgruppen sind zueinander konjugiert.
(ii) Eine p-Sylowgruppe ist genau dann ein Normalteiler, wenn sie die einzige p-Sylowgruppe der Gruppe ist.

1.4.4 Satz (Dritter Sylowscher Satz) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $p^r m$ $(r \geq 1)$, mit einer Primzahl p und $p \not| \, m$, sei s_p definiert als die Anzahl der p-Sylowgruppen. Dann gilt:
(i) s_p teilt die Gruppenordnung, also $s_p | ord(G)$,
(ii) $s_p \equiv 1 \pmod{p}$.

1.5 Die symmetrische Gruppe S_n

In diesem Kapitel werden einige wichtige Eigenschaften der symmetrischen Gruppe S_n aufgelistet und insbesondere für den Spezialfall S_p mit einer Primzahl p einige Besonderheiten bewiesen, die für den weiteren Fortgang dieser Arbeit von immenser Bedeutung sind. Wird in diesem Abschnitt ein Satz ohne Beweis angegeben, so kann dieser in einem Standard-Lehrbuch der Algebra nachgelesen werden, insbesondere in Meyberg [6]. Zumeist wird im Folgenden die Zykelschreibweise verwendet, wobei Zykel der Länge 2 als *Transpositionen* bezeichnet werden. Der erste Satz, der hier angeführt wird, zeigt dann auch einige Rechenregeln für Zykel auf. Doch zuvor werden noch zwei Definitionen betrachtet:

1.5.1 Definition Jede Untergruppe von S_n heißt eine *Permutationsgruppe vom Grad n*.

1.5.2 Definition Sei G eine Permutationsgruppe auf der Zahlenmenge Ω. G heißt auf Ω *transitiv*, wenn für alle $i, j \in \Omega$ eine Abbildung $\pi \in G$ existiert mit $\pi(i) = j$.

1.5.3 Satz Sei $(i_1, i_2, ..., i_r)$ ein Zykel der Länge r aus S_n $(r \leq n)$, dann gelten:
(i) $(i_1, ..., i_r) = (i_2, i_3, ..., i_r, i_1) = ... = (i_r, i_1, ..., i_{r-1})$.
(ii) $(i_1, ..., i_r)^m = \left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ i_{m+1} & \dots & i_{m+r} \end{smallmatrix}\right)$, wobei die Indizes der unteren Zeile modulo r zu nehmen sind.
(iii) $\pi\ (i_1, ..., i_r)\ \pi^{-1} = (\pi(i_1), ..., \pi(i_r))$ für alle $\pi \in S_n$.

1.5.4 Satz Es gelten: $|S_n| = n!$ und $|A_n| = \frac{1}{2}\ n!$.

1.5.5 Definition und Satz Zykel $(i_1, ..., i_r)$ und $(j_1, ..., j_s)$ nennt man *elementfremd*, wenn $\{i_1, ..., i_r\} \cap \{j_1, ..., j_s\} = \emptyset$ erfüllt ist. Für elementfremde Zykel gelten:
(i) Elementfremde Zykel sind vertauschbar.
(ii) Jede Permutation aus S_n ist als Produkt elementfremder Zykel eindeutig (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) darstellbar.
(iii) Sei $\pi = \xi_1 \cdots \xi_k$ eine Darstellung von π als Produkt elementfremder Zykel, dann ist $ord(\pi) = kgV\{ord(\xi_\nu) | \nu = 1, ..., k\}$.

Aussage (iii) findet man in Hall [1], Seite 54. Nachdem nun einige Eigenschaften der allgemeinen symmetrischen Gruppe S_n aufgezeigt wurden, soll jetzt der Spezialfall S_p mit einer Primzahl p betrachtet werden, da sich hier einige besondere Aussagen herleiten lassen.

1.5.6 Lemma Sei p eine Primzahl, dann sind Elemente der Ordnung p der symmetrischen Gruppe S_p Zykel der Länge p.

Beweis: Nach 1.5.5(ii) lässt sich jede Permutation $\pi \in S_p$ als Produkt elementfremder Zykel darstellen und wegen 1.5.5(iii) muss π ein Zykel der Länge p sein, d.h. π hat die Form $\pi = (i_1, ..., i_p)$ mit $\{i_1, ..., i_p\} \subseteq \{1, ..., p\}$. #

1.5.7 Lemma Sei p eine Primzahl, dann gibt es $(p-1)!$ Elemente der Ordnung p in S_p.

Beweis: Lemma 1.5.6 zufolge hat ein Element π der Ordnung p die Form $\pi = (i_1, ..., i_p)$ mit $\{i_1, ..., i_p\} \subseteq \{1, ..., p\}$. Insgesamt gibt es $p!$ Möglichkeiten, die Zahlen $1, ..., p$ anzuordnen, wobei je p davon nach 1.5.3(i) den gleichen Zykel darstellen. Also gibt es $\frac{p!}{p} = (p-1)!$ verschiedene p-Zykel in S_p. #

1.5.8 Lemma Sei p eine Primzahl, dann sind zwei p-Sylowgruppen P_1, P_2 aus S_p entweder identisch oder haben trivialen Durchschnitt, d.h. es gilt: $P_1 \neq P_2 \implies P_1 \cap P_2 = \{(1)\}$.

Beweis: Da $|S_p| = p \cdot (p-1)!$ ist (mit einer Primzahl(!) p), haben die p-Sylowgruppen stets die Ordnung p, sind also zyklisch mit $p-1$ Elementen der Ordnung p. Damit haben P_1, P_2 die Form $P_1 = \langle p_1 \rangle$ und $P_2 = \langle p_2 \rangle$ mit geeigneten Elementen p_1, p_2 der Ordnung p. Infolge des trivialen Schnittes unterschiedlicher zyklischer Gruppen primer Ordnung resultiert die Aussage. #

1.5.9 Satz Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe von S_p und $N_{S_p}(P)$ der Normalisator der p-Sylowgruppe. Dann gilt:

$$|N_{S_p}(P)| = p \cdot (p-1).$$

Beweis: Sei s_p die Anzahl der p-Sylowgruppen in S_p. Nach 1.4.3 ist s_p gleich der Anzahl der zu P konjugierten Untergruppen und damit wegen 1.1.11 gleich dem Index von $N_{S_p}(P)$ in S_p, ergo $s_p = |S_p : N_{S_p}(P)|$. Wegen $|S_p| = p!$ und 1.1.6 bedeutet dies nun $p! = s_p \cdot |N_{S_p}(P)|$ $(\star)$. Da nach 1.5.8 verschiedene p-Sylowgruppen trivialen Schnitt haben und jede $p-1$ Elemente der Ordnung p enthält, gibt es $(p-1) \cdot s_p$ Elemente der Ordnung p, woraus mit 1.5.7 deutlich wird: $s_p = (p-2)!$. Mit $(\star)$ folgt die Behauptung. #

1.5.10 Korollar Sei p eine Primzahl, U eine Untergruppe von S_p und P eine p-Sylowgruppe von S_p mit $P \preceq U$. Dann gilt für den Normalisator von P in U:

$$|N_U(P)| = m \cdot p \text{ mit } m | p-1.$$

Beweis: Offensichtlich gilt $P \preceq N_U(P) \preceq N_{S_p}(P)$ und mit der Ungleichung $p = |P| \leq |N_U(P)| \leq |N_{S_p}(P)| = p(p-1)$ resultiert die Aussage. #

1.5.11 Satz Sei p eine Primzahl, $\pi \in S_p$ ein Element der Ordnung p, dann gilt für den Zentralisator: $C_{S_p}(\pi) = \langle \pi \rangle$.

Beweis: Nach 1.5.6 hat π die Form $\pi = (k_1, ..., k_p)$ mit $k_i \in \{1, ..., p\}$ für alle $i = 1, ..., p$, und für ein Element $f \in C_{S_p}(\pi)$ muss wegen 1.5.3(iii) gelten:

$$f\pi f^{-1} = (f(k_1), ..., f(k_p)) \overset{!}{=} (k_1, ..., k_p) \iff f(k_i) = k_{i+c} \text{ für alle } i = 1, ..., p \text{ und festem } c,$$

wobei die Indizes modulo p zu nehmen sind $\iff$ $f = \pi^c$. Also folgt $C_{S_p}(\pi) = \langle \pi \rangle$. #

Nachdem nun die Struktur des Zentralisators genau bekannt ist, soll nochmals der Normalisator einer p-Sylowgruppe betrachtet werden, welcher sich, wie sich zeigen wird, ebenfalls relativ genau identifizieren lässt. Doch zuvor benötigen wir eine Hilfsaussage, die direkt aus 1.5.3 folgt:

1.5.12 Lemma Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe aus S_p, $y = (i_1, ..., i_p)$ ein Element der Ordnung p, dann gilt: $(i_1, ..., i_p)^m = (i_1, i_{1+m}, i_{1+2m}, ..., i_{1+(p-1)m})$, wobei die Indizes modulo p zu nehmen sind.

Beweis: Für $m \equiv 0 \pmod p$ ist die Aussage trivial. Da p eine Primzahl ist, ist auch $(i_1, ..., i_p)^m$ für $1 \leq m \leq p-1$ ein Element der Ordnung p und damit wegen 1.5.6 ein p-Zykel. Nach 1.5.3 gilt nun $(i_1, ..., i_r)^m = \begin{pmatrix} \cdots & i_k & \cdots \\ \cdots & i_{k+m} & \cdots \end{pmatrix}$, woraus direkt die Behauptung folgt. #

1.5.13 Lemma Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe aus S_p, dann gilt:
(i) P ist einzige p-Sylowgruppe von $N_{S_p}(P)$.
(ii) P ist Normalteiler von $N_{S_p}(P)$.

Beweis: (ii) resultiert aus der Definition 1.1.10 des Normalisators, (i) folgt mit 1.4.3(ii). #

1.5.14 Satz Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe aus S_p, $y = (i_1, ..., i_p)$ ein Element der Ordnung p mit $P = \langle y \rangle$, dann existiert ein Element $f \in S_p$ der Ordnung $p-1$ so, dass $N_{S_p}(P) = P \cdot \langle f \rangle$ ist.

Beweis: Für $p = 2$ ist die Behauptung trivial. Sei nun $p > 2$:
Die Gruppe $\mathbb{Z}_p^* = \{1, ..., p-1\}$ ist bekanntlich zyklisch der Ordnung $p-1$, d.h. es liegt ein $m \in \mathbb{Z}_p^*$ mit $\langle m \rangle = \mathbb{Z}_p^*$ vor. Damit aber besteht die Menge $\{1+1, 1+m, 1+m^2, ..., 1+m^{p-2}\}$ als Teilmenge von $\mathbb{Z}_p = \{1, ..., p\}$, wobei $p \equiv 0 \pmod p$ ist, aus den $p-1$ unterschiedlichen Elementen $\{2, ..., p\}$. Somit existiert ein Zykel der Länge $p-1$ aus S_p, der sich darstellen lässt in der Form $f = (i_{1+1}, i_{1+m}, ..., i_{1+m^{p-2}})$; dieser Zykel f ist dann von Ordnung $p-1$. Diese Abbildung kann auch wiedergeben werden durch $f(i_{1+m^k}) = i_{1+m^{k+1}}$ für $k = 0, ..., p-2$, denn auch $f(i_{1+m^{p-2}}) = i_{1+m^{p-1}} = i_2$ erfüllt diese Funktionsgleichung.
Da aber $1 + m^{k+1} = 1 + ((1+m^k) - 1)m$ ist, lässt sich f auch schreiben als $f(i_j) = i_{1+(j-1)m}$ für $j = 2, ..., p$. Wenden wir nun dieses Zykel auf y an, dem Erzeugendenelement von P:
Da y der Ordnung p ist, ist auch fyf^{-1} der Ordnung p mit (man vergleiche 1.5.3(iii))

$$fyf^{-1} = f(i_1, ..., i_p)f^{-1} = (f(i_1), f(i_2), ..., f(i_p)) = (i_1, i_{1+m}, ..., i_{1+(p-1)m}),$$

was aber gerade gleich y^m ist, siehe 1.5.12. Damit jedoch ist $f \in N_{S_p}(P)$, d.h.: Der Normalisator einer p-Sylowgruppe in S_p enthält stets ein Element der Ordnung $p-1$ (dabei handelt es sich sogar um ein Zykel der Länge $p-1$).
Nach Lemma 1.5.13(ii) ist $P \trianglelefteq N_{S_p}(P)$. Hiermit kann 1.3.2 angewendet werden und es resultiert:

$$\langle f \rangle \cdot P/P \cong \langle f \rangle / (\langle f \rangle \cap P) \cong \langle f \rangle \ (\star),$$

da $\langle f \rangle$ als zyklische Gruppe der Ordnung $p-1$ keine Elemente der Ordnung p enthält, ergo $\langle f \rangle \cap P = \{(1)\}$ ist. Damit ergibt sich für die Mächtigkeit des Produkts $P \cdot \langle f \rangle \preceq N_{S_p}(P)$ gemäß 1.1.12, dass

$$|P \cdot \langle f \rangle| = |P| \cdot |\langle f \rangle| = p(p-1) = |N_{S_p}(P)|$$

ist, womit sich schließlich die Behauptung erweist. #

1.5.15 Korollar Sei p eine Primzahl, P eine p-Sylowgruppe aus S_p, dann gilt:
(i) $N_{S_p}(P)/P$ ist zyklisch von Ordnung $p-1$.
(ii) $N_{S_p}(P)/P$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_p^*$.

Beweis: Nach 1.5.14 und ($\star$) im zug. Beweis ist $N_{S_p}(P)/P \cong \langle f \rangle$ mit $ord(f) = p-1$, also zyklisch der Ordnung $p-1$, woraus (i) folgt; (ii) ist eine äquivalente Formulierung. #

Kapitel 2

Gruppen mit kleinen Zentralisatorschranken

2.1 Die Zentralisatorschranke

In diesem Kapitel sollen Gruppen betrachtet werden, in denen jedes Element mit höchstens $n \in \mathbb{N}$ verschiedenen Konjugierten versehen ist (und auch tatsächlich mindestens ein Element existiert, welches exakt n verschiedene Konjugierte besitzt).
Verfügt ein Element über $k \in \mathbb{N}$ verschiedene Konjugierte, so ist dies nach 1.1.11 äquivalent dazu, dass der Normalisator dieses Elementes den Index k aufweist, was nach 1.1.15 wiederum äquivalent dazu ist, dass der Zentralisator dieses Elementes den Index k hat. Wir erhalten also:

2.1.1 Lemma Sei G eine Gruppe und $g \in G$ beliebig gewählt, sei $k \in \mathbb{N}$. Es sind äquivalent:
(i) g hat k verschiedene Konjugierte.
(ii) $|G : C_G(g)| = k$.
(iii) Für die Mächtigkeit der Menge $[g, G] = \{[g, x] | x \in G\}$ gilt: $|[g, G]| = k$.

Beweis: Es ist nur noch (i), (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) zu zeigen: Stets ist $|[g, G]| = |[G, g]|$ erfüllt. Da für alle $g, h \in G$ gilt, dass $hgh^{-1} = [h, g]g$ ist, folgt die Äquivalenz (i) $\Leftrightarrow$ (iii). #

Damit ist es nun möglich, den Begriff der *Zentralisatorschranke* einzuführen:

2.1.2 Definition Sei G eine Gruppe und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. G besitzt die *Zentralisatorschranke* n, wenn gilt:
(i) Für alle $x \in G$ ist $|G : C_G(x)| \leq n$.
(ii) Es existiert ein $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = n$.

Wie Lemma 2.1.1 nahe legt, lässt sich die Zentralisatorschranke auch durch folgende, äquivalente Formulierungen beschreiben:

2.1.3 Korollar Sei G eine Gruppe und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Es sind gleichwertig:
(i) G besitzt die Zentralisatorschranke n.
(ii) Jedes Element aus G hat höchstens n verschiedene Konjugierte und es existiert ein Element mit genau n Konjugierten.
(iii) Für alle $g \in G$ ist $|[g, G]| \leq n$ und es findet sich ein Element $t \in G$ mit $|[t, G]| = n$.

2.1.4 Beispiel Betrachten wir die Diedergruppe D_3, dann kann man der Verknüpfungstafel entnehmen, dass Zentralisatoren in D_3 nur die Indizes 1, 2 oder 3 haben; ergo hat D_3 die Zentralisatorschranke 3.
Ein Hinweis zum Lesen dieser (im Folgenden häufiger vorkommenden) Verknüpfungstafel: Den Zentralisator eines Elementes erkennt man dadurch, dass man die zum Element gehörige Zeile sucht und die grau unterlegten Felder betrachtet; die entsprechenden Elemente am oberen Tabellenrand sind dann gerade die Zentralisatorelemente.
Ein Beispiel: Den Zentralisator zum Element sd findet man, indem man in die vorletzte Zeile geht und die zu den grau unterlegten Feldern gehörigen Spaltenelemente (von links nach rechts sind dies e und sd) abliest; hier also ist $C_{D_3}(sd) = \{e, sd\}$.

	e	d	d²	s	sd	sd²	I
e	e	d	d²	s	sd	sd²	1
d	d	d²	e	sd²	s	sd	2
d²	d²	e	d	sd	sd²	s	2
s	s	sd	sd²	e	d	d²	3
sd	sd	sd²	s	d²	e	d	3
sd²	sd²	s	sd	d	d²	e	3

Abbildung 2.1: Verknüpfungstafel zu D_3

Besitzt eine Gruppe G eine gewisse Zentralisatorschranke, so überträgt sich diese auf das direkte Produkt mit einer beliebigen abelschen Gruppe und, in abgeschwächter Form, auch auf jede Unter- und Faktorgruppe, was folgender Satz zeigt:

2.1.5 Satz Sei G eine Gruppe, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. G habe die Zentralisatorschranke n. Dann gelten:
(i) Jede Untergruppe von G hat eine Zentralisatorschranke von höchstens n.
(ii) Jede Faktorgruppe von G hat eine Zentralisatorschranke von höchstens n.
(iii) Sei A eine beliebige abelsche Gruppe. Dann hat $A \otimes G$ die Zentralisatorschranke n.
(iv) Sei H eine Gruppe mit Zentralisatorschranke $m \in \mathbb{N}$. Dann hat $H \otimes G$ die Zentralisatorschranke $m \cdot n$.

Beweis: (i) Sei U eine beliebige Untergruppe von G, dann gilt für die Zahl der Konjugierten: Für alle $u \in U$ ist $|\{vuv^{-1}|v \in U\}| \leq |\{vuv^{-1}|v \in G\}| \leq n$ und damit hat U nach 2.1.3 eine Zentralisatorschranke von höchstens n.
(ii) Sei $N \trianglelefteq G$ ein beliebiger Normalteiler von G, sei $xN \in G/N$ beliebig gewählt, dann zeigt sich: $|\{(gN)(xN)(gN)^{-1}|gN \in G/N\}| = |\{(gxg^{-1})N|g \in G\}| \leq |\{gxg^{-1}|g \in G\}| \leq n$, womit nach 2.1.3 die Behauptung folgt.
(iv) Es sei $\binom{y}{x} \in H \otimes G$ beliebig gewählt, dann hat dies zur Konsequenz:
$|\{\binom{h}{g}\binom{y}{x}\binom{h}{g}^{-1}|h \in H,\ g \in G\}| = |\{\binom{hyh^{-1}}{gxg^{-1}}|h \in H, g \in G\}| = |\{hyh^{-1}|h \in H\}| \cdot |\{gxg^{-1}|g \in G\}| = mn.$
Nach 2.1.1 resultiert die Aussage.
(iii) wird sich mit 2.2.1 als Spezialfall von (iv) erweisen. #

2.1.6 Beispiel Die Aussage 2.1.5(iii) kann am Beispiel $D_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ illustriert werden (Verknüpfungstabelle siehe 2.3.25), wo die Zentralisatorschranke gegenüber D_3 (vgl. 2.1.4) unverändert ist. Durch ein solches direktes Produkt mit einer beliebigen abelschen Gruppe besteht also die Möglichkeit, Gruppen bestimmter Zentralisatorschranke beliebig „aufzublähen", auch bis ins Unendliche (direktes Produkt mit $\mathbb{Z}$).

Nun verlassen wir für einen kurzen Moment solche Gruppen, welche eine gewisse Zentralisatorschranke haben, und beschäftigen uns allgemein mit Gruppen, die eine Untergruppe vom Index $n \in \mathbb{N}$ besitzen. Dabei wird ein Gedankengang aufgegriffen, wie er in ähnlicher Form in Huppert [4], S. 28ff, angeführt wird. Es gilt folgender Satz:

2.1.7 Satz Sei U eine Untergruppe der Gruppe G mit Index $|G:U| = n \in \mathbb{N}$, sei $G = \bigcup_{i=1}^{n} Ug_i$ die Nebenklassenzerlegung von G. Sei $\Omega := \{Ug_i | i = 1, ..., n\}$ und als Ziffernmenge aufgefasst. Sei die Abbildung π gegeben durch $\pi(g) := \left(\begin{smallmatrix} ... & Ug_i & ... \\ ... & Ug_ig & ... \end{smallmatrix}\right)$ für $g \in G$ und $i = 1, ..., n$. Dann gelten:
(i) π ist ein Epimorphismus von G auf eine transitive Untergruppe von S_n über Ω.
(ii) Der Kern von π ist: $Kern(\pi) = \bigcap_{x \in G} xUx^{-1}$.
Man bezeichnet π als *Permutationsdarstellung* von G auf den Nebenklassen von U.

Beweis: (i) Seien $g, h \in G$ beliebig gewählt, dann ist

$$\pi(gh) = \begin{pmatrix} ... \; Ug_i \; ... \\ ... \; Ug_igh \; ... \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} ... \; Ug_i \; ... \\ ... \; U(g_ig)h \; ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... \; Ug_ig \; ... \\ ... \; (Ug_ig)h \; ... \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ... \; Ug_i \; ... \\ ... \; Ug_ig \; ... \end{pmatrix}}_{\text{Leserichtung beachten: } Ug_i \to Ug_ig \to Ug_igh} = \pi(h) \cdot \pi(g),$$

womit π ein Epimorphismus ist. Die Untergruppe, in die π abbildet, sei mit $V := \pi(G)$ bezeichnet. Da für alle $Ug_i, Ug_j \in \Omega$ gilt, dass $(Ug_i)g_i^{-1}g_j = Ug_j$ ist, ist $\pi(g_i^{-1}g_j) \in V$ die gesuchte Permutation, die ein beliebiges Element $Ug_i \in \Omega$ in ein beliebiges $Ug_j \in \Omega$ überführt; also ist V gemäß 1.5.2 transitiv.
(ii) Sei $g \in G$, so ist $\pi(g) = e$ genau dann, wenn für alle $i = 1, ..., n$ gilt, dass $Ug_ig = Ug_i$, also $g_igg_i^{-1} \in U$ bzw. $g \in g_i^{-1}Ug_i$ ist. $(\star)$
Für beliebiges $x \in G$ ist Ux gleich einer der Nebenklassen der Nebenklassenzerlegung von G, also beispielsweise ist $Ux = Ug_j$, was äquivalent dazu ist, dass $x^{-1}U = g_j^{-1}U$ ist (denn $Ux = Ug_j \Leftrightarrow U = Ug_jx^{-1} \Leftrightarrow g_jx^{-1} \in U \Leftrightarrow g_jx^{-1}U = U \Leftrightarrow x^{-1}U = g_j^{-1}U$) und damit $\underline{x^{-1}U}x = g_j^{-1}\underline{Ux} = g_j^{-1}Ug_j$. Somit ist $\{xUx^{-1} | x \in G\} = \{g_i^{-1}Ug_i | i = 1, ..., n\}$. Zusammen mit $(\star)$ ergibt dies, dass $\pi(g) = e$ genau dann, wenn $g \in \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}Ug_i = \bigcap_{x \in G} xUx^{-1}$ ist; als Konsequenz ergibt sich $Kern(\pi) = \bigcap_{x \in G} xUx^{-1}$. #

2.1.8 Korollar Sei U eine Untergruppe der Gruppe G mit dem Index $|G:U| = n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) n teilt $|G/N|$.
(ii) $|G/N|$ teilt $n!$.
Eine zu beiden äquivalente Formulierung ist: $|G/N| = n \cdot m$ mit $m | (n-1)!$.
$N := \bigcap_{x \in G} xUx^{-1}$ ist ein solcher Normalteiler.

Beweis: Nach 2.1.7 ist $N := \bigcap_{x \in G} xUx^{-1} \preceq U$ Kern eines Homomorphismus π über G (definiert wie dort) und damit Normalteiler von G. Nach 1.3.1 ist G/N isomorph zu $\pi(G)$, und das ist eine Untergruppe von S_n; damit folgt (ii). Also ist $|G:N| < \infty$, sowieso $|G:U| = n \in \mathbb{N}$. Mit 1.1.8 erhält man $|G:N| = \underbrace{|G:U|}_{=n} \cdot \underbrace{|U:N|}_{\in \mathbb{N}}$ und damit (i). #

Damit sind wir am Ausgangspunkt dieser Arbeit angelangt; rekapitulieren wir nochmals kurz dieses letzte Korollar: Verfügt eine Gruppe über eine Untergruppe des Index $n \in \mathbb{N}$, so existiert ein Normalteiler, dessen Index der Form $n \cdot m$ mit $m|(n-1)!$ ist; hier werden aber im Folgenden nicht nur Gruppen mit einer Untergruppe des Index n betrachtet, sondern Gruppen mit Zentralisatoren des Index n, ja, noch stärker: Gruppen, deren gesamte Zentralisatoren einen Index von höchstens n haben, und die Fragen, die sich hier ergeben, sind natürlich:

Kann man obige Schranke für den Index eines Normalteiler noch verbessern?
Ergeben sich Aussagen über Auflösbarkeit, gar Nilpotenz der Gruppe?
Können Schlüsse auf die Kommutatorgruppe gezogen werden?

Es wird wohl kaum überraschen, dass solche Aussagen vor allem auch von der Art der vorgegebenen Zentralisatorschranke abhängen; so verwundert es nicht, wenn man zu einer primen Zentralisatorschranke andere Ergebnisse erhält als bei beliebig vorgegebener Zahl, und dieser „Verdacht“ wird sich in den folgenden Kapitel auch erhärten. Doch bevor Gruppen, die eine prime Zentralisatorschranke haben, behandelt werden, soll noch kurz auf Zentralisatoren allgemein eingegangen werden; die dabei gewonnenen Aussagen werden in späteren Abschnitten des Öfteren Anwendung finden.

2.1.9 Satz Sei G eine Gruppe, sei $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. G habe die Zentralisatorschranke n. Sei $x \in G$ mit $|G : C_G(x)| = n$, dann sei definiert $D(x) := \bigcap_{g \in G} gC_G(x)g^{-1}$.
$D(x)$ verfügt über folgende Eigenschaften:
(i) $D(x)$ ist Normalteiler von G.
(ii) $D(x) = C_G(x) \iff C_G(x) \trianglelefteq G$.
(iii) $G/D(x)$ ist isomorph zu einer transitiven Untergruppe von S_n.
(iv) $|G/D(x)| = n \cdot m$ mit $m|(n-1)!$.

Beweis: (i) Nach 2.1.7 ist $D(x) := \bigcap_{g \in G} gC_G(x)g^{-1}$ Kern eines Homomorphismus π über G (definiert wie dort) und damit Normalteiler von G.
(ii) $D(x) = C_G(x) \iff \forall_{g \in G}\ gC_G(x)g^{-1} = C_G(x) \iff C_G(x) \trianglelefteq G$.
(iii) resultiert direkt aus 2.1.7, (iv) ist eine Konsequenz aus 2.1.8. #

2.1.10 Satz Sei G eine Gruppe, $x \in G$ nach Belieben bestimmt, dann gelten:
(i) Für alle $g \in G$ ist $C_G(gxg^{-1}) = gC_G(x)g^{-1}$.
(ii) Für alle $g \in G$ ist $C_G(gxg^{-1}) = C_G(x) \iff C_G(x) \trianglelefteq G$.
(iii) $\langle x \rangle \preceq C_G(x)$.
(iv) Sei $C_G(x)$ abelsch, dann ist für alle $g \in G$ auch $C_G(gxg^{-1})$ abelsch.
(v) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $C_G(x) \preceq C_G(x^k)$.

Beweis: (i) „$\preceq$“: Sei $y \in C_G(gxg^{-1})$ beliebig gewählt, dann resultiert:

$$(g^{-1}yg)x(g^{-1}yg)^{-1} = g^{-1} \underbrace{y(gxg^{-1})y^{-1}}_{=gxg^{-1},\ da\ y \in C_G(gxg^{-1})} g = x,$$

womit $g^{-1}C_G(gxg^{-1})g \preceq C_G(x) \iff C_G(gxg^{-1}) \preceq gC_G(x)g^{-1}$ gilt.
„$\succeq$“: Sei irgendein $z \in C_G(x)$ gegeben, dann resultiert $gC_G(x)g^{-1} \preceq C_G(gxg^{-1})$ aus

$$(gzg^{-1})gxg^{-1}(gzg^{-1})^{-1} = g \underbrace{zxz^{-1}}_{=x,\ da\ z \in C_G(x)} g^{-1} = gxg^{-1}.$$

(ii) Folgt direkt aus (i) und 1.1.9, (iii) ist trivial.
(iv) Sei nun $C_G(x)$ abelsch, seien $g \in G$, sowie $a, b \in C_G(gxg^{-1})$ beliebig gewählt. Nach (i) existieren Elemente $u, v \in C_G(x)$ so, dass $a = gug^{-1}$ und $b = gvg^{-1}$ ist. Somit gilt für a, b: $ab = gug^{-1}gvg^{-1} = guvg^{-1} \;=\; gvug^{-1} = ba$, also ist $C_G(gxg^{-1})$ abelsch.

(v) Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $g \in C_G(x)$ ist $gx^kg^{-1} = \underbrace{\overbrace{(gxg^{-1})}^{=x} \cdots (gxg^{-1})}_{k \text{ Faktoren}} = x^k$. Außerdem ist $C_G(x^0) = G$ sowie $C_G(x^{-1}) = C_G(x)$, da stets gilt: $gxg^{-1} = x \iff gx^{-1}g^{-1} = x^{-1}$. #

2.1.11 Satz Sei G eine Gruppe, dann ist $Z(G) = \bigcap_{g \in G} C_G(g)$.

Beweis: Einerseits liegt das $Z(G)$ natürlich in jedem Zentralisator, andererseits sind im Schnitt aller Zentralisatoren definitionsgemäß gerade jene Elemente enthalten, die mit allen Gruppenelementen vertauschbar sind. #

2.1.12 Lemma Sei G eine Gruppe mit einem Zentralisator $C_G(t)$, der kein Normalteiler in G ist, dann gilt für $D(t) := \bigcap_{g \in G} gC_G(t)g^{-1}$, dass $G/D(t)$ nicht abelsch ist.

Beweis: Da $C_G(t)$ kein Normalteiler ist, kann nach Lemma 2.3.64 die Kommutatorgruppe G' nicht in $C_G(t)$, und somit auch nicht in $D(t) \preceq C_G(t)$, enthalten sein; 1.2.5 liefert nun die Behauptung. #

2.1.13 Lemma Sei G eine Gruppe, sei $N \trianglelefteq G$ mit $Z(G) \preceq N$. Sei G/N nilpotent von Klasse $k \in \mathbb{N}$. Dann ist G, falls überhaupt nilpotent, mindestens von Klasse $k+1$.

Beweis: Nach 1.3.3 ist $G/N \cong (G/Z(G)) \;/\; (N/Z(G))$, einer Faktorgruppe in $G/Z(G)$. Da $G/Z(G)$ eine Faktorgruppe der Klasse k enthält, ist es auch selber mindestens von Klasse k. Gemäß der Definition der aufsteigenden Zentralreihe in 1.2.12 ist G damit mindestens von Klasse $k+1$. #

2.1.14 Lemma Sei G eine Gruppe, $x \in G$ beliebig gewählt, dann gilt:
(i) $M(x) := \langle \{gxg^{-1} | g \in G\} \rangle$ ist Normalteiler in G.
(ii) Sind je zwei beliebige Konjugierte von x vertauschbar, so ist $M(x)$ sogar abelsch.

Beweis: (i) Sei $y \in M(x)$ beliebig, dann hat y die Gestalt $y = g_1xg_1^{-1} \cdots g_nxg_n^{-1}$. Sei $h \in G$ beliebig gewählt, dann ist

$$hyh^{-1} = hg_1xg_1^{-1}h^{-1} \cdot h \cdots h^{-1} \cdot hg_nxg_n^{-1}h^{-1} = (hg_1)x(hg_1)^{-1} \cdots (hg_n)x(hg_n)^{-1} \in M(x),$$

womit $M(x) \trianglelefteq G$ ist. (ii) ist trivial. #

2.2 Die Zentralisatorschranke 1

Der am Nächsten liegende zu untersuchende Fall ist sicherlich jener einer Gruppe mit Zentralisatorschranke 1, was bedeutet, dass der Zentralisator eines jeden Elementes den Index 1 in der Gruppe hat. Dies ist nach 1.1.6 äquivalent dazu, dass die Mächtigkeit eines jeden Zentralisators der Mächtigkeit der Gruppe entspricht und damit ein jeder Zentralisator gleich der Gruppe ist. Dieses Ergebnis soll in einem Satz festgehalten werden:

2.2.1 Satz Sei G eine Gruppe. Es sind äquivalent:
(i) G hat die Zentralisatorschranke 1.
(ii) G ist abelsch.

Beweis: G besitzt die Zentralisatorschranke 1.
$\Longleftrightarrow$ Für alle $x \in G$ ist $|G : C_G(x)| = 1$.
$\Longleftrightarrow$ Für alle $x \in G$ ist $C_G(x) \equiv G$ (da $C_G(x) \preceq G$).
$\Longleftrightarrow$ Für alle $x, g \in G$ ist $gxg^{-1} = x \;\Leftrightarrow\; gx = xg$.
$\Longleftrightarrow$ G ist abelsch. #

Gruppen, welche die Zentralisatorschranke 1 haben, sind abelsch und damit auch auflösbar und nilpotent. Bezüglich der Mächtigkeit der Gruppe ergeben sich keinerlei Einschränkungen, zudem ist jede Untergruppe automatisch Normalteiler.
Betrachten wir nun einen etwas „spannenderen“ Fall:

2.3 Prime Zentralisatorschranken

In diesem Kapitel sollen Gruppen betrachtet werden, welche die Zentralisatorschranke p haben, wobei p eine Primzahl ist. Im Folgenden sei stets $t \in G$ ein Element aus G so, dass $|G : C_G(t)| = p$ ist und $D(t)$ analog 2.1.9 definiert. Dann ist $D(t)$ ein Normalteiler mit der Eigenschaft, dass die Mächtigkeit der zugehörigen Faktorgruppe $G/D(t)$ der Form $p \cdot m$ ist, wobei $m|(p-1)!$ gilt.
In diesem Fall besteht eine p-Sylowgruppe in $G/D(t)$ der Ordnung p, welche damit automatisch zyklisch ist. Dies hat zur Folge, dass Elemente der Ordnung p in $G/D(t)$ existieren und damit auch ein $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$ (und $w^k \notin D(t)$ für $k = 1, ..., p-1$ [1]).
Im Anschluß wollen wir uns mit $\langle w, D(t)\rangle$ beschäftigen, welches nach 1.1.4 von der Form

$$\langle w, D(t)\rangle = \{x_1 \cdots x_n | x_i \in \{w, w^{-1}\} \cup D(t)\ \forall_{i=1}^{n},\ n \in \mathbb{N}\}$$

ist. Für das Erzeugnis $\langle w, D(t)\rangle$ lässt sich nun zeigen:

2.3.1 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$, dann gilt:
(i) Für alle Elemente $x \in \langle w, D(t)\rangle$ existiert ein $d \in D(t)$ und eine Zahl $j \in \{0, ..., p-1\}$ so, dass sich x darstellen lässt in der Form $x = w^j d$, bzw. es gilt:

$$\langle w, D(t)\rangle = \{w^j d | j \in \{0, ..., p-1\}, d \in D(t)\}.$$

(ii) $\langle w, D(t)\rangle / D(t) = \langle wD(t)\rangle$ mit $ord(wD(t)) = p$ in $G/D(t)$.

Beweis: Sei $x_1 \cdots x_n \in \langle w, D(t)\rangle,\ n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt, dann kann x geschrieben werden in der Form $x = d_1 w_1 \cdots d_k w_k d_{k+1}$, wobei $d_i \in D(t)$ und $w_j \in W := \{w^r | r \in \mathbb{Z}\}$ ist mit $i = 1, ..., k+1,\ j = 1, ..., k,\ k \in \mathbb{N}$.
Da $D(t)$ ein Normalteiler von G ist, ergibt sich nun gemäß 1.1.9:

$$x = d_1 w_1 \cdots \underbrace{w_{k-1} w_k}_{=:\tilde{w}_{k-1} \in W} \underbrace{\underbrace{w_k^{-1} d_k w_k}_{\in D(t)} d_{k+1}}_{=:\tilde{d}_k \in D(t)} = d_1 w_1 \cdots \underbrace{w_{k-2} \tilde{w}_{k-1}}_{=:\tilde{w}_{k-2} \in W} \underbrace{\underbrace{\tilde{w}_{k-1}^{-1} d_{k-1} \tilde{w}_{k-1}}_{\in D(t)} \tilde{d}_k}_{=:\tilde{d}_{k-1} \in D(t)}$$

$$= \ \dots\ = d_1 \tilde{w}_1 \tilde{d}_2 = \tilde{w}_1 \underbrace{\underbrace{\tilde{w}_1^{-1} d_1 \tilde{w}_1}_{\in D(t)} \tilde{d}_2}_{=:\tilde{d}_1 \in D(t)} = \tilde{w}_1 \tilde{d}_1.$$

$\tilde{w}_1$ lässt sich stets schreiben als $\tilde{w}_1 = w^{zp+j}$ mit $z \in \mathbb{Z}$ und $j \in \{0, ..., p-1\}$; damit folgt, dass $x = w^j (w^p)^z \tilde{d}_1 = w^j d$ ist mit $w^p \in D(t)$ und $d := (w^p)^z \tilde{d}_1$.
(ii) ist eine direkte Konsequenz aus (i). #

Die Faktorgruppe $\langle w, D(t)\rangle / D(t)$ ist also eine zyklische Gruppe der Ordnung p und wird erzeugt vom Element $wD(t) \in G/D(t)$. Betrachten wir im Folgenden den Zentralisator dieses Elementes:

[1] Angenommen, es gäbe ein $j \in \{2, ..., p-1\}$ mit $w^j \in D(t)$, wobei gilt, dass $ggT(j, p) = 1$, da p Primzahl ist. Dann existieren nach 1.1.20 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ mit $1 = \alpha j + \beta p$, ergo ist $w = (\underbrace{w^j}_{\in D(t)})^\alpha (\underbrace{w^p}_{\in D(t)})^\beta \in D(t)$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $w \in G \setminus D(t)$ steht!

2.3.2 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$, dann gelten:
(i) $C_{G/D(t)}(wD(t)) = \langle w, D(t)\rangle/D(t) = \langle wD(t)\rangle \trianglelefteq G/D(t)$ von Ordnung p.
Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m|p-1$, so dass gilt:
(ii) $|G/D(t)| = p \cdot m$. (iii) $|G : \langle w, D(t)\rangle| = m$.

Beweis: (i) Offensichtlich gilt für jede Untergruppe U einer Gruppe H, dass für beliebiges $x \in U$ der Zentralisator $C_U(x)$ eine Untergruppe von $C_H(x)$ ist.
Da $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe S von S_p ist, und für jedes Element $y \in S$ der Ordnung p nach 1.5.11 gilt, dass $C_S(y) \preceq C_{S_p}(y) = \langle y\rangle$ ist, folgt, dass der Zentralisator $C_{G/D(t)}(wD(t)) \preceq \langle wD(t)\rangle$ ist. Wegen $\langle wD(t)\rangle \preceq C_{G/D(t)}(wD(t))$ resultiert sogar Gleichheit.
Nach 1.1.6 und 2.1.9 gilt die Gleichung

$$|G/D(t) : C_{G/D(t)}(wD(t))| \cdot |C_{G/D(t)}(wD(t))| = |G/D(t)| = p \cdot m \qquad (\star),$$

wobei $|G/D(t) : C_{G/D(t)}(wD(t))| \leq p$ wegen 2.1.5 ist und m einen Teiler von $(p-1)!$ darstellt. Die Mächtigkeit $|C_{G/D(t)}(wD(t))| = p$ erzwingt nun sogar $m = |G/D(t) : C_{G/D(t)}(wD(t))| < p$, ergo $|G/D(t)| = p \cdot m$ mit $m < p$.
Dies liefert zusammen mit 1.4.4, dass $G/D(t)$ genau eine p-Sylowgruppe besitzt, welche nach 1.4.3 Normalteiler von Ordnung p ist; nach 2.3.1 muss $\langle w, D(t)\rangle/D(t)$ diese p-Sylowgruppe sein.
(ii) $\langle w, D(t)\rangle/D(t)$ ist also eine p-Sylowgruppe von $G/D(t)$ und zudem Normalteiler, ergo $N_{G/D(t)}(\langle wD(t)\rangle) = G/D(t)$, die Gruppe $G/D(t)$ wiederum ist isomorph zu einer Untergruppe von S_p, also sind alle Voraussetzungen von 1.5.10 erfüllt und es gilt:

$$|G/D(t)| = |N_{G/D(t)}(\langle wD(t)\rangle)| = p \cdot m \text{ mit } m|p-1.$$

(iii) resultiert aus (i) und $(\star)$. #

Damit sind wir an einer ersten wichtigen Stelle dieses Kapitels angelangt: Die in 2.1.8 vorgegebene Schranke für den Index eines Normalteilers einer Gruppe, welche eine prime Zentralisatorschranke besitzt, kann tatsächlich deutlich verfeinert werden: Liegt eine Gruppe vor, die über eine prime Zentralisatorschranke verfügt, so muss diese Gruppe einen Normalteiler besitzen, dessen Index von der Form $p \cdot m$ ist mit $m|p-1$. Und auch die in 2.1.7 gefundene transitive Untergruppe kann nun mit 1.5.4 und 2.3.2(ii) genauer identifiziert werden:

2.3.3 Beispiel Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p, wobei $p > 3$ eine Primzahl sei. Dann ist $G/D(t)$ isomorph zu einer echten Untergruppe von S_p, verschieden von A_p.
Für Gruppen G mit Zentralisatorschranke 2 erhält man mit 1.2.5 dagegen, dass $G/D(t) \cong S_2$ und $G' \preceq D(t)$ ist.

2.3.4 Lemma Sei G eine Gruppe, $N \preceq U \preceq G$ und $N \trianglelefteq G$.
Es ist $U/N \trianglelefteq G/N$ genau dann, wenn gilt: $U \trianglelefteq G$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: $U/N \trianglelefteq G/N$ bedeutet, dass für alle $u \in U$ und alle $g \in G$ gilt, dass $(gN)(uN)(gN)^{-1} = (gug^{-1})N \in U/N$ ist, also in jedem Fall auch $gug^{-1} \in U$, womit die Behauptung folgt.
„$\Leftarrow$“: Klar nach Definition 1.1.12. #

Zusammen mit 2.3.2 erlaubt dieses Lemma folgenden Schluss:

2.3.5 Korollar Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$, dann ist $\langle w, D(t)\rangle \trianglelefteq G$.

2.3.6 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$, dann ist $G/\langle w, D(t)\rangle$ zyklisch und somit $G' \preceq \langle w, D(t)\rangle$.

Wie in 2.3.2(i) gezeigt, ist $N_{G/D(t)}(\langle wD(t)\rangle) = G/D(t)$.
Sei S jene Untergruppe aus S_p, zu der $G/D(t)$ isomorph ist, und sei P jene p-Sylowgruppe aus $S \preceq S_p$, welcher $\langle wD(t)\rangle$ entspricht, dann gilt:
$G/\langle w, D(t)\rangle \cong N_{G/D(t)}(\langle wD(t)\rangle)/\langle wD(t)\rangle \cong N_S(P)/P \preceq N_{S_p}(P)/P$, und das ist nach 1.5.15 zyklisch, also ist auch $G/\langle w, D(t)\rangle$ zyklisch, insbesondere auch abelsch; 1.2.5 liefert den zweiten Teil der Behauptung. #

Nach Satz 2.3.2(iii) ist der Index von $|G : \langle w, D(t)\rangle| = m$ mit $m|p-1$. Eine Möglichkeit für ein solches m ist sicherlich die Wahl $m = 1$, welche zur Folge hat, dass die Gruppe G schon vollständig bestimmt wäre, es ist dann nämlich $G = \langle w, D(t)\rangle$ und vor allem $D(t) = C_G(t)$, also $C_G(t) \trianglelefteq G$. Im anderen Fall, wenn $m > 1$ und somit $C_G(t)$ kein Normalteiler in G ist, liefert der vorherige Satz 2.3.6, dass ein Element $v \in G$ existieren muss, mit $v \notin \langle w, D(t)\rangle$, so dass $G = \langle v, w, D(t)\rangle$ ist. In diesem Abschnitt werden also die beiden Fälle, dass $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$ oder $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$ ist, getrennt betrachtet.
Beginnen wir mit $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$, d.h. dem Fall, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler in G ist. Als Folgerung aus 2.3.6 erhalten wir:

2.3.7 Lemma Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $C_G(t)$ kein Normalteiler in G.
Es existiere also ein $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$ und $m := |G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$.
Dann gibt es $v \in G$ so, dass $v, ..., v^{m-1} \notin \langle w, D(t)\rangle$, $v^m \in \langle w, D(t)\rangle$ und $G = \langle v, w, D(t)\rangle$ ist.
G lässt sich darstellen als $G = \{v^k w^j d | k = 0, ..., m-1;\ j = 0, ..., p-1;\ d \in D(t)\}$.

Beweis: Es ist $G = \langle\ v, \langle w, D(t)\rangle\ \rangle$, wobei $\langle w, D(t)\rangle$ nach 2.3.5 ein Normalteiler von G ist. Damit folgt analog dem Beweis zu 2.3.1, dass $g \in G$ von der Form $g = v^k q$ ist, mit $k \in \{0, ..., m-1\}$ und $q \in \langle w, D(t)\rangle$, und somit nach 2.3.1 die Behauptung. #

Die im Folgenden betrachtete Gruppe sei bis auf Widerruf die aus 2.3.7, insbesondere auch, was die Definition der Elemente v, w, etc. betrifft.
Gleich zu Beginn kann folgende Aussage getroffen werden:

2.3.8 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann ist G nicht nilpotent.

Beweis: Nach 2.3.4 ist $C_G(t)/D(t)$ kein Normalteiler der Gruppe $G/D(t)$. Andererseits gilt jedoch nach 1.1.6 und 1.1.8, dass der Index

$$|G/D(t) : C_G(t)/D(t)| = \frac{|G : D(t)|}{|C_G(t) : D(t)|} = |G : C_G(t)| = p$$

ist, womit $C_G(t)/D(t)$ eine maximale Untergruppe von $G/D(t)$ ist. Nach 1.2.10 ist also $G/D(t)$ nicht nilpotent, was sich gemäß 1.2.9 auf G überträgt. #
Man beachte hierbei besonders, dass diese Aussage auch bei unendlichem G gültig ist, da G stets die endliche Faktorgruppe $G/D(t)$ besitzt, auf welche 1.2.10 angewendet werden darf.

Die weiteren Überlegungen werden sich zunächst auf den Zentralisator $C_G(v)$ konzentrieren, der sich, genau wie $C_G(t)$, als nichtnormal und vom Index p herausstellen wird.

2.3.9 Lemma Sei G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und U und V Untergruppen von G, wobei N in U und V enthalten sei. Dann ist $U/N \cap V/N = (U \cap V)/N$.

Beweis: „$\succeq$“: Die Aussage resultiert aus
$xN \in U/N \cap V/N \iff xN \in \{aN | aN \in U/N \wedge aN \in V/N\} \supseteq \{aN | aN \in (U \cap V)/N\}$.
„$\preceq$“: Alle x mit $xN \in U/N \cap V/N$ lassen sich sowohl in der Form $x = un_1$ als auch $x = vn_2$ darstellen, mit $n_1, n_2 \in N$, sowie $u \in U$ und $v \in V$. Ergo ist $x \in UN \cap VN = U \cap V$ und $xN \in (U \cap V)/N$. #

2.3.10 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann ist $C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle \preceq D(t)$.

Beweis: Nach 2.3.2 ist $\langle wD(t)\rangle$ ein Normalteiler von $G/D(t)$, so dass gilt: $vD(t)\langle wD(t)\rangle v^{-1}D(t) \subseteq \langle wD(t)\rangle$, d.h. nach 2.3.1 existiert ein $r \in \{1, ..., p-1\}$, so dass $vD(t)wD(t)v^{-1}D(t) = w^r D(t)$ erfüllt ist.
Angenommen, es wäre $r = 1$, dann wäre $vD(t) \in C_{G/D(t)}(wD(t)) = \langle wD(t)\rangle = \langle w, D(t)\rangle/D(t)$ (nach 2.3.2(i)), also auch $v \in \langle w, D(t)\rangle$, im Widerspruch zur Voraussetzung.
Also ist $r \not\equiv 1 \pmod p$ und $vD(t) \notin C_{G/D(t)}(wD(t))$, was äquivalent mit $wD(t) \notin C_{G/D(t)}(vD(t))$ ist und somit $C_{G/D(t)}(vD(t)) \cap \langle wD(t)\rangle = \{D(t)\}$ als Konsequenz hat. Es gilt deshalb (wegen 2.3.9): $\{D(t)\} = \underbrace{C_{G/D(t)}(vD(t))}_{\succeq C_G(v)D(t)/D(t)} \cap \langle wD(t)\rangle \succeq (\ C_G(v)D(t)/D(t)\ ) \cap (\ \langle w, D(t)\rangle/D(t)\ ) = (C_G(v)D(t) \cap \langle w, D(t)\rangle)/D(t) \succeq \{D(t)\}$. Damit ergibt sich aber $C_G(v)D(t) \cap \langle w, D(t)\rangle = D(t)$ und wegen $C_G(v) \preceq C_G(v)D(t)$ die Behauptung. #

2.3.11 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gelten:
(i) $|G : C_G(v)| = p$ (ii) $p = |\langle w, D(t)\rangle : D(t)| = |\langle w, D(t)\rangle : (C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle)|$

Beweis: Mit 2.3.10 erhält man folgende Ungleichung:
$$p = |\langle w, D(t)\rangle : D(t)| \leq |\langle w, D(t)\rangle : (C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle)| \overset{1.1.8}{=} \tfrac{|G:(C_G(v)\cap\langle w,D(t)\rangle)|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|}$$
$$\overset{1.1.8}{=} |G : C_G(v)| \tfrac{|C_G(v):(C_G(v)\cap\langle w,D(t)\rangle)|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|} \overset{1.1.12}{=} |G : C_G(v)| \tfrac{|C_G(v)/(C_G(v)\cap\langle w,D(t)\rangle)|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|}$$
$$\overset{1.3.2}{=} |G : C_G(v)| \tfrac{|C_G(v)\langle w,D(t)\rangle/\langle w,D(t)\rangle|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|} \overset{1.3.2}{\leq} |G : C_G(v)| \tfrac{|G/\langle w,D(t)\rangle|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|} = |G : C_G(v)| \leq p$$
nach Voraussetzung (Zentralisatorschranke p), woraus (i) und (ii) folgen. Man beachte dabei, dass man die für die Verwendung von 1.1.8 benötigten Endlichkeitsaussagen erhält, wenn man obige Ungleichung rückwärts liest und berücksichtigt, dass die Beschränkung von $|G : C_G(v)| \frac{|C_G(v):(C_G(v)\cap\langle w,D(t)\rangle)|}{|G:\langle w,D(t)\rangle|} \leq p$ sowie die Endlichkeit von $|G : C_G(v)|$ und $|G : \langle w, D(t)\rangle|$ die von $|C_G(v) : (C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle)|$ nach sich zieht. #

2.3.12 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gelten:
(i) $C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle = D(t)$. (ii) $D(t) \preceq C_G(v) \preceq C_G(v^j)$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.
(iii) $D(t) \preceq C_G(wvw^{-1})$. (iv) $C_G(v)$ und $C_G(wvw^{-1})$ sind maximal in G.

Beweis: 2.3.11 liefert $|\langle w, D(t)\rangle/D(t)| = |\langle w, D(t)\rangle/\overbrace{C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle}^{\preceq D(t)\ nach\ 2.3.10}|$, was (i) ergibt.
(ii) ist eine Folgerung aus (i) und 2.1.10(v).
(iii) Mit 2.1.10(i) und 2.3.12(ii) erhält man: $C_G(wvw^{-1}) = wC_G(v)w^{-1} \succeq wD(t)w^{-1} = D(t)$.
(iv) Folgt direkt aus 2.3.11(i) und 2.1.10(i), sowie der Definition 1.1.2. #

Somit sind wir der Struktur von $C_G(v)$ und $C_G(wvw^{-1})$ ein Stück näher gekommen und es lässt sich für diese beiden Zentralisatoren eine Aussage machen, die sogar allgemein in maximalen Untergruppen von Gültigkeit ist:

2.3.13 Lemma Sei G eine Gruppe, sei M maximale Untergruppe von G, dann gilt für jedes $g \in G \setminus M$, dass $G = \langle g, M \rangle$ ist.

Beweis: Die Ungleichung $|M| < |\langle g, M \rangle| \leq |G|$ ergibt mit 1.1.2 die Behauptung. #

Um von dieser Eigenschaft profitieren zu können, müssen die Zentralisatoren $C_G(v)$ und $C_G(wvw^{-1})$ vollends identifiziert und charakterisiert werden, was in mehreren Schritten geschehen soll:

2.3.14 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gelten:
(i) $\langle v, D(t) \rangle = \{v^j d | j = 0, ..., m-1,\ d \in D(t)\}$ mit $|\langle v, D(t) \rangle / D(t)| = m$.
(ii) $C_G(v) = \langle v, D(t) \rangle$ vom Index p in G.

Beweis: (i) Nach 2.1.10(iii) und 2.3.12(i) ist $\langle v \rangle \preceq C_G(v)$, somit $\langle v \rangle \cap \langle w, D(t) \rangle \preceq D(t)$ und deshalb gemäß 2.3.7 gerade $v, ..., v^{m-1} \notin D(t)$ und $v^m \in D(t)$. Auf diese Weise erhält man analog zum Beweis von 2.3.1 die Behauptung.
(ii) Nach (i) hat jedes $x \in \langle v, D(t) \rangle$ die Form $x = v^j d$ mit geeigneten $j \in \{0, ..., m-1\}$ und $d \in D(t)$, womit aus 2.1.10(iii) und 2.3.12(ii) gerade $\langle v, D(t) \rangle \preceq C_G(v)$ $(\star)$ folgt.
Des Weiteren ist $|G : \langle v, D(t) \rangle| \overset{1.1.5}{=} \frac{|G:D(t)|}{|\langle v, D(t) \rangle : D(t)|} \overset{2.3.2,\ (i)}{=} \frac{m \cdot p}{m} = p \overset{2.3.11}{=} |G : C_G(v)|$, was mit $(\star)$ die These ergibt. #

2.3.15 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7.
Dann ist für alle $u \in D(t)$ und $j \in \mathbb{Z}$ stets $D(t) \preceq C_G(v^j u)$.

Beweis: Für alle $g \in G$ und alle $u \in D(t)$ ist $gug^{-1} \in D(t)$, da $D(t) \trianglelefteq G$ ist, und somit berechnet sich $g(vu)g^{-1}D(t) = gvg^{-1}\ gug^{-1}D(t) = gvg^{-1}D(t)$, was jetzt wiederum $C_{G/D(t)}(vD(t)) = C_{G/D(t)}(vuD(t)) \succeq C_G(vu)D(t)/D(t)$ zur Konsequenz. Analog den Beweisen von 2.3.10 bis 2.3.12 zeigt man nun: $D(t) \preceq C_G(vu)\ \forall_{u \in D(t)}$. Daraus folgt aber für alle $u, d \in D(t)$ und alle $j \in \mathbb{Z}$, dass $dv^j ud^{-1} = \underbrace{dv^{j-1}d^{-1}}_{=v^{j-1},\ da\ D(t) \preceq C_G(v)} \underbrace{dvud^{-1}}_{=vu} = v^j u$ ist und damit die Behauptung. #

2.3.16 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gelten:
(i) $C_G(v) = \langle v, D(t) \rangle$ ist abelsch. (ii) $D(t)$ ist abelsch.
(iii) $C_G(wvw^{-1})$ ist abelsch.

Beweis: (i) Seien $x, y \in \langle v, D(t) \rangle$ beliebig gewählt, dann sind diese nach 2.3.14 von der Form $x = v^i d_1$ und $y = v^j d_2$ mit geeigneten $i, j \in \{0, ..., m-1\}$ und $d_1, d_2 \in D(t)$. Man erhält unter Berücksichtigung von 2.3.12(iii) und 2.3.15:
$xy = v^i \underbrace{d_1 v^j}_{=v^j d_1} d_2 = v^j v^i d_1 d_2 = v^j d_2 \underbrace{d_2^{-1} v^i d_1 d_2}_{=v^i d_1} = yx$, woraus die Behauptung folgt.
(ii) folgt direkt aus (i), (iii) zusammen mit 2.1.10(iv). #

$C_G(v)$ und $C_G(wvw^{-1})$ sind also abelsche Untergruppen des Index p, die sich durch $\langle v, D(t)\rangle$ bzw. $\langle wvw^{-1}\rangle$ erzeugen lassen. Schließlich lässt sich nun noch zeigen, dass $C_G(v)$ (und somit $C_G(wvw^{-1})$ kein Normalteiler in G ist, womit sich mit den zuvor gewonnenen Aussagen eine ganze Reihe bedeutender Folgerungen ableiten lassen:

2.3.17 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt: $C_G(v)$ ist kein Normalteiler von G.

Beweis: Der Beweis wird per Widerspruch geführt und Schritt für Schritt entwickelt; im Folgenden sei also vorausgesetzt: $C_G(v) \trianglelefteq G$. Blicken wir zurück zum ursprünglich betrachteten Zentralisator $C_G(t)$, aus dem ja die Untergruppe $D(t) := \bigcap_{g\in G} gC_G(t)g^{-1}$ entstanden war, und der ebenfalls vom Index p ist, allerdings kein Normalteiler in G. Offensichtlich gilt deshalb:
(i) $C_G(v) \not\equiv C_G(t)$.
(ii) $D(t) \preceq C_G(v) \cap C_G(t)$.
Bew.: Es gilt: $C_G(v) = \langle v, D(t)\rangle$ und $D(t) = \bigcap_{g\in G} gC_G(t)g^{-1}$, was die Behauptung ergibt. $\surd$
(iii) $C_G(v) \cdot C_G(t) = G$.
Bew.: Nach 1.3.2 ist $C_G(v) \cdot C_G(t)$ eine Untergruppe von G, da $C_G(v)$ aber nach 2.3.12(iv) eine maximale Untergruppe ist, folgt mit 1.1.2 die Behauptung. $\surd$
Nach 1.3.2 gilt nun $G/C_G(v) = (C_G(v) \cdot C_G(t))/C_G(v) \cong C_G(t)/(C_G(t) \cap C_G(v))$, womit sich nun folgende Ungleichung ergibt:
$p = |G : C_G(v)| = |C_G(t)/\underbrace{(C_G(t) \cap C_G(v))}_{\succeq D(t)\ nach\ (ii)}| \leq |C_G(t)/D(t)| = \frac{|G:D(t)|}{|G:C_G(t)|} = \frac{m\cdot p}{p} = m$, was ein Widerspruch ist. Also folgt, dass $C_G(v)$ kein Normalteiler von G ist. #

2.3.18 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
(i) $C_G(v) \not\equiv C_G(wvw^{-1})$. (ii) $G = \langle C_G(v), C_G(wvw^{-1})\rangle$.

Beweis: (i) Per Widerspruch! Sei also $C_G(v) \equiv C_G(wvw^{-1})$. Mit Induktion zeigt man leicht, dass sich aus $C_G(v) \equiv C_G(wvw^{-1}) = wC_G(v)w^{-1}$ ableiten lässt:
($\star$) Für alle $j \in \mathbb{Z}$ ist $w^j C_G(v) w^{-j} = C_G(v)$.
Nach 2.3.12 ist $w \notin C_G(v)$. Da $C_G(v)$ nach 2.3.14(ii) gleich $\langle v, D(t)\rangle$ ist, folgt somit, dass $G = \langle w, C_G(v)\rangle$ ist. Nach 1.1.4 lässt sich also ein beliebiges $g \in G$ darstellen als endliches Produkt $g = a_1 b_1 \cdots a_n b_n$ mit $a_1, ..., a_n \in \langle w\rangle$ und $b_1, ..., b_n \in C_G(v)$. Wegen ($\star$) ist damit aber $gC_G(v)g^{-1} = a_1 \cdots \underbrace{a_n \underbrace{b_n C_G(v) b_n^{-1}}_{=C_G(v)} a_n^{-1}}_{=C_G(v)} \cdots a_1^{-1} = C_G(v)$, woraus mit 1.1.9 folgt, dass $C_G(v) \trianglelefteq G$ ist. Dies aber widerspricht Satz 2.3.17.
(ii) Resultiert aus (i), 2.3.12(iv) und 2.3.13. #

2.3.19 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt: $D(t) = Z(G)$, dem Zentrum von G.

Beweis: „$\preceq$“: Laut 2.3.18(ii) ist $G = \langle C_G(v), C_G(wvw^{-1})\rangle$, also lässt sich jedes Element $g \in G$ nach 1.1.4 als endliches Produkt von Faktoren aus $C_G(v)$ und $C_G(wvw^{-1})$ schreiben, welche beide jeweils abelsch sind. Da $D(t)$ aber in beiden enthalten ist, ist jedes Element aus $D(t)$ mit jedem Faktor der obigen Faktordarstellung eines beliebigen $g \in G$ vertauschbar, also auch mit jedem $g \in G$. $\surd$
„$\succeq$“: Nach 2.1.11 ist $Z(G) = \bigcap_{h\in G} C_G(h) \preceq \bigcap_{g\in G} C_G(gtg^{-1}) = \bigcap_{g\in G} gC_G(t)g^{-1} = D(t)$. #

Daraus resultiert auch, dass $t \notin D(t)$ ist, also evtl. auch die Wahl $v = t$ möglich wäre.

Allgemein ist nun gültig: Für alle $g \in G$ ist $\langle g, D(t)\rangle = \langle g, Z(G)\rangle$ abelsch. Somit kann man in diesem Fall schließen:

2.3.20 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann ist $\langle w, D(t)\rangle$ abelscher Normalteiler in G.

Des Weiteren ist $G = \langle a, b, Z(G)\rangle$ mit $a, b, ..., b^{m-1} \notin Z(G)$ und $a^p, b^m \in Z(G)$.

2.3.21 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
G ist auflösbar von Stufe 2 (metaabelsch).

Beweis: Nach 2.3.6 ist $G/\langle w, D(t)\rangle$ zyklisch und abelsch, so dass G' gemäß 1.2.5 in $\langle w, D(t)\rangle$ liegt, und Letzteres ist, wie eben in 2.3.20 bewiesen, abelsch, weshalb 1.2.7 die Behauptung liefert. #

Fassen wir kurz zusammen: Ist $C_G(t)$ ein Zentralisator vom Index p, jedoch kein Normalteiler in G, so ist der Durchschnitt $D(t)$ gleich dem Zentrum von G! Zudem ist G zwar nicht nilpotent, aber immerhin auflösbar von Stufe 2. Außerdem lässt sich 2.1.8 dahingehend präzisieren, dass man für eine Gruppe G mit primer Zentralisatorschranke p stets entweder einen Normalteiler vom Index p (falls $C_G(t) \trianglelefteq G$ ist) oder vom Index m findet, wobei m ein Teiler von $p-1$ ist ($\langle w, D(t)\rangle$ wäre ein solcher); in beiden Fällen ist die zugehörige Faktorgruppe zyklisch.
In 2.3.3 wurde bereits der Fall einer Gruppe mit Zentralisatorschranke 2 gesondert behandelt (welche ohnehin nicht zum momentan betrachteten Fall gehört), auch für den Fall einer Zentralisatorschranke 3 kann man eine stärkere Aussage als die in 2.3.21 treffen:

2.3.22 Beispiel Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 3, dann ist $G/D(t)$ entweder isomorph zu S_3 oder zu A_3, und es gilt:
(i) Ist $G/D(t)$ isomorph zu S_3, so ist G auflösbar.
(ii) Ist $G/D(t)$ isomorph zu A_3, so ist $G' \preceq D(t) = C_G(t)$.
Denn: Dass $G/D(t)$ isomorph zu S_3 bzw. A_3 ist, folgt aus 2.3.2 sowie 1.5.4. (i) ist ein Spezialfall von 2.3.21, (ii) ergibt sich aus 1.2.5, da in diesem Fall $G/D(t)$ abelsch ist und $C_G(t) \trianglelefteq G$.

Bevor abschließend die Kommutatorgruppe von G bestimmt wird, betrachten wir noch kurz den Zentralisator $C_G(w)$:

2.3.23 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
(i) $C_G(w) = \langle w, D(t)\rangle \trianglelefteq G$ und $|G/C_G(w)| = m$.
(ii) Für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(k, p) = 1$ ist $C_G(w^k) = \langle w, D(t)\rangle$, ansonsten ist $C_G(w^k) = G$

Beweis: (i) Nach 2.3.20 ist $\langle w, D(t)\rangle$ abelsch und damit eine Untergruppe von $C_G(w)$. Nach 1.1.14 ist der Zentralisator von w definiert als $C_G(w) = \{g \in G | gwg^{-1} = w\}$. Mit Aussage 2.3.2(i) erhält man deshalb:
$\langle w, D(t)\rangle/D(t) = C_{G/D(t)}(wD(t)) \succeq C_G(w)/D(t) \implies |C_G(w)/D(t)| \leq |\langle wD(t)\rangle| = p$.
Mit 1.1.8 und 2.3.2 ergibt sich folgende Ungleichung, woraus mit 2.3.20 die Behauptung folgt:

$$m = \frac{m \cdot p}{p} \leq \frac{|G : D(t)|}{|C_G(w) : D(t)|} = |G : C_G(w)| = \frac{|G : \langle w, D(t)\rangle|}{|C_G(w) : \langle w, D(t)\rangle|} = \frac{m}{\underbrace{|C_G(w) : \langle w, D(t)\rangle|}_{\geq 1}} \leq m.$$

(ii) Sei $k \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(k,p) = 1$. Nach 2.1.10(v) ist $C_G(w) \preceq C_G(w^k)$. Nach 1.1.20 existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ so, dass $1 = \alpha k + \beta p$ ist. Also gilt: $w = (w^k)^\alpha(\overbrace{w^p}^{\in D(t) \equiv Z(G)})^\beta$. Sei $g \in C_G(w^k)$ beliebig gewählt, dann ist $gwg^{-1} = \overbrace{g(w^k)^\alpha g^{-1}}^{=(w^k)^\alpha,\ da\ g \in C_G(w^k)} (w^p)^\beta = (w^k)^\alpha (w^p)^\beta = w$, also auch $C_G(w^k) \preceq C_G(w)$, was zusammen mit (i) den ersten Teil der Behauptung liefert.
Für $ggT(k,p) \neq 1$ ist $ggT(k,p) = p$, also $w^k \in D(t) = Z(G)$, womit alles gezeigt ist. #

2.3.24 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt: $\langle v, w\rangle$ ist Normalteiler von G.
Ist $\langle v, w\rangle \cap D(t) = \{e\}$, so erhält man sogar:
G ist das direkte Produkt aus $\langle v, w\rangle$ und $Z(G)$.

Beweis: Ein beliebiges $g \in G$ kann nach 2.3.7 und 2.3.19 als endliches Produkt von Faktoren $g = g_1 \cdots g_n$ mit $n \in \mathbb{N}$, die entweder aus $\langle v\rangle$, $\langle w\rangle$ oder $Z(G)$ entstammen, dargestellt werden. Sei h ein irgendein Element aus $\langle v, w\rangle$, dann resultiert offensichtlich, dass $\tilde{v}h\tilde{v}^{-1} \in \langle v, w\rangle$ für $\tilde{v} \in \langle v\rangle$ bzw. $\tilde{w}h\tilde{w}^{-1} \in \langle v, w\rangle$ für $\tilde{w} \in \langle w\rangle$ ist. Somit gilt für jeden Faktor g_i, $i = 1, ..., n$, aus obiger Faktordarstellung, dass $g_i h g_i^{-1} \in \langle v, w\rangle$ und somit auch $ghg^{-1} \in \langle v, w\rangle$ ist. Nach 1.1.9 ist $\langle v, w\rangle$ also ein Normalteiler von G.
Ist $\langle v, w\rangle \cap D(t) = \{e\}$, so folgt mit 1.1.17 die Behauptung. #

Von der mathematischen Aussagekraft her ist dieser Satz eher uninteressant, aber im Umkehrschluss ermöglicht er die einfache Konstruktion von Gruppen, die eine vorgegebene prime Zentralisatorschranke aufweisen sollen:
Zu vorgegebener Primzahl p wähle man ein geeignetes m mit $m|p-1$ und $m > 1$ und Elemente v und w so, dass $ord(v) = m$, $ord(w) = p$, $|\langle v, w\rangle| = m \cdot p$ und $\langle v, w\rangle$ nicht abelsch ist. Bildet man anschließend das direkte Produkt mit einer abelschen Gruppe A, so erhält man eine Gruppe G derart, dass G die Zentralisatorschranke p und das Zentrum $\{e\} \otimes A$ besitzt.

2.3.25 Beispiel Wie schon aus 2.1.4 bekannt, verfügt D_3 über die Zentralisatorschranke $p = 3$. Nun ist die Gruppe per direktem Produkt mit $\mathbb{Z}_3$ vergrößert worden, ohne dass sich an der Zentralisatorschranke etwas verändert hätte (Verknüpfungstafel siehe nächste Seite).
Vollziehen wir das bisher Gefundene an diesem Beispiel $G := D_3 \otimes \mathbb{Z}_3$ mit der Verknüpfung $\binom{a}{b}\binom{c}{d} := \binom{ac}{b+d}$ nach:
Wählen wir das Element $t := \binom{s}{0}$ mit $|G : C_G(t)| = 3$ und $C_G(t) = \{\binom{e}{0}, \binom{s}{0}, \binom{e}{1}, \binom{s}{1}, \binom{e}{2}, \binom{s}{2}\}$.
Es ist $\binom{d}{0}\binom{s}{k}\binom{d}{0}^{-1} = \binom{sd}{k}$ für $k = 0, 1, 2$, so dass $D(t) = \bigcap_{g \in G} gC_G(t)g^{-1} = \{\binom{e}{0}, \binom{e}{1}, \binom{e}{2}\}$ ist.
Auch ist $|G/D(t)| = \frac{|G|}{|D(t)|} = \frac{18}{3} = 3 \cdot 2 = p(p-1)$ in Übereinstimmung mit 2.3.2.
Wählen wir $w := \binom{d}{0}$, so ist $w \notin D(t)$, sehr wohl aber $w^3 = \binom{e}{0}$. Damit ergibt sich das Erzeugnis $\langle w, D(t)\rangle$ zu $\{\binom{e}{0}, \binom{d}{0}, \binom{d^2}{0}, \binom{e}{1}, \binom{d}{1}, \binom{d^2}{1}, \binom{e}{2}, \binom{d}{2}, \binom{d^2}{2}\}$ mit $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 2$ in Übereinstimmung mit 2.3.2.
Es muss nun nach 2.3.7 ein Element $v \in G$ existieren mit $v \notin \langle w, D(t)\rangle$, $v^{p-1} \in \langle w, D(t)\rangle$ sowie $G = \langle v, w, D(t)\rangle$; man sieht leicht, dass $v := \binom{sd}{0}$ all' dies erfüllt.
Auch ist $|G : C_G(v)| = 3$ und $C_G(v) = \{\binom{e}{0}, \binom{sd}{0}, \binom{e}{1}, \binom{sd}{1}, \binom{e}{2}, \binom{sd}{2}\} = \langle v, D(t)\rangle$ (hierzu vergleiche man die Sätze 2.3.11 und 2.3.14(ii)).
Da $\binom{d}{0}\binom{sd}{0}\binom{d}{0}^{-1} = \binom{sd^2}{0} \notin C_G(v)$ ist, ist $C_G(v)$ kein Normalteiler von G (vgl. hierzu 2.3.17), andererseits ist $C_G(v)$ abelsch (vgl. 2.3.16). Zudem ist $Z(G) = \{\binom{e}{0}, \binom{e}{1}, \binom{e}{2}\} = \{e\} \otimes \mathbb{Z}_3$ und

	e 0	d 0	d^2 0	s 0	sd 0	sd^2 0	e 1	d 1	d^2 1	s 1	sd 1	sd^2 1	e 2	d 2	d^2 2	s 2	sd 2	sd^2 2	Index
e 0	e 0	d 0	d^2 0	s 0	sd 0	sd^2 0	e 1	d 1	d^2 1	s 1	sd 1	sd^2 1	e 2	d 2	d^2 2	s 2	sd 2	sd^2 2	1
d 0	d 0	d^2 0	e 0	sd^2 0	s 0	sd 0	d 1	d^2 1	e 1	sd^2 1	s 1	sd 1	d 2	d^2 2	e 2	sd^2 2	s 2	sd 2	2
d^2 0	d^2 0	e 0	d 0	sd 0	sd^2 0	s 0	d^2 1	e 1	d 1	sd 1	sd^2 1	s 1	d^2 2	e 2	d 2	sd 2	sd^2 2	s 2	2
s 0	s 0	sd 0	sd^2 0	e 0	d 0	d^2 0	s 1	sd 1	sd^2 1	e 1	d 1	d^2 1	s 2	sd 2	sd^2 2	e 2	d 2	d^2 2	3
sd 0	sd 0	sd^2 0	s 0	d^2 0	e 0	d 0	sd 1	sd^2 1	s 1	d^2 1	e 1	d 1	sd 2	sd^2 2	s 2	d^2 2	e 2	d 2	3
sd^2 0	sd^2 0	s 0	sd 0	d 0	d^2 0	e 0	sd^2 1	s 1	sd 1	d 1	d^2 1	e 1	sd^2 2	s 2	sd 2	d 2	d^2 2	e 2	3
e 1	e 1	d 1	d^2 1	s 1	sd 1	sd^2 1	e 2	d 2	d^2 2	s 2	sd 2	sd^2 2	e 0	d 0	d^2 0	s 0	sd 0	sd^2 0	1
d 1	d 1	d^2 1	e 1	sd^2 1	s 1	sd 1	d 2	d^2 2	e 2	sd^2 2	s 2	sd 2	d 0	d^2 0	e 0	sd^2 0	s 0	sd 0	2
d^2 1	d^2 1	e 1	d 1	sd 1	sd^2 1	s 1	d^2 2	e 2	d 2	sd 2	sd^2 2	s 2	d^2 0	e 0	d 0	sd 0	sd^2 0	s 0	2
s 1	s 1	sd 1	sd^2 1	e 1	d 1	d^2 1	s 2	sd 2	sd^2 2	e 2	d 2	d^2 2	s 0	sd 0	sd^2 0	e 0	d 0	d^2 0	3
sd 1	sd 1	sd^2 1	s 1	d^2 1	e 1	d 1	sd 2	sd^2 2	s 2	d^2 2	e 2	d 2	sd 0	sd^2 0	s 0	d^2 0	e 0	d 0	3
sd^2 1	sd^2 1	s 1	sd 1	d 1	d^2 1	e 1	sd^2 2	s 2	sd 2	d 2	d^2 2	e 2	sd^2 0	s 0	sd 0	d 0	d^2 0	e 0	3
e 2	e 2	d 2	d^2 2	s 2	sd 2	sd^2 2	e 0	d 0	d^2 0	s 0	sd 0	sd^2 0	e 1	d 1	d^2 1	s 1	sd 1	sd^2 1	1
d 2	d 2	d^2 2	e 2	sd^2 2	s 2	sd 2	d 0	d^2 0	e 0	sd^2 0	s 0	sd 0	d 1	d^2 1	e 1	sd^2 1	s 1	sd 1	2
d^2 2	d^2 2	e 2	d 2	sd 2	sd^2 2	s 2	d^2 0	e 0	d 0	sd 0	sd^2 0	s 0	d^2 1	e 1	d 1	sd 1	sd^2 1	s 1	2
s 2	s 2	sd 2	sd^2 2	e 2	d 2	d^2 2	s 0	sd 0	sd^2 0	e 0	d 0	d^2 0	s 1	sd 1	sd^2 1	e 1	d 1	d^2 1	3
sd 2	sd 2	sd^2 2	s 2	d^2 2	e 2	d 2	sd 0	sd^2 0	s 0	d^2 0	e 0	d 0	sd 1	sd^2 1	s 1	d^2 1	e 1	d 1	3
sd^2 2	sd^2 2	s 2	sd 2	d 2	d^2 2	e 2	sd^2 0	s 0	sd 0	d 0	d^2 0	e 0	sd^2 1	s 1	sd 1	d 1	d^2 1	e 1	3

Abbildung 2.2: Verknüpfungstafel zu $D_3 \otimes \mathbb{Z}_3$

somit $Z(G) = D(t)$ (gemäß 2.3.19).
Abschließend betrachten wir die Kommutatorgruppe von G: Man prüft leicht nach, dass $[D_3, D_3] = \{e, d, d^2\}$ ist, womit $G' = \{\binom{e}{0}, \binom{d}{0}, \binom{d^2}{0}\}$ und somit nach 2.3.6 eine Untergruppe von $\langle w, D(t)\rangle$ ist.
Man erkennt aber auch, dass G' eine zyklische Untergruppe der Ordnung p und der Schnitt mit dem Zentrum trivial ist; dass dies kein Zufall ist, werden die folgenden Sätze zeigen.

Beginnen wir mit der Kommutatorgruppe G' von G. Wie bereits angedeutet, ist es das Ziel zu zeigen, dass die Mächtigkeit von G' gleich p (und G' damit zyklisch) ist, wozu in einem ersten Schritt ein Endomorphismus konstruiert wird, dessen Bild die Mächtigkeit p hat, in einem zweiten Schritt dann gezeigt wird, dass das Bild dieses Endomorphismus gerade der Kommutatorgruppe G' entspricht.

2.3.26 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
$\varphi(r) := vrv^{-1}r^{-1}$ für $r \in \langle w, D(t)\rangle$ ist ein Endomorphismus.

Beweis: Offensichtlich ist $\varphi(r)$ in G' enthalten und dieses wiederum nach 2.3.6 in $\langle w, D(t)\rangle$, somit ist φ eine Abbildung von $\langle w, D(t)\rangle$ nach $\langle w, D(t)\rangle$.
Für beliebige Elemente $r, s \in \langle w, D(t)\rangle$ gilt nun:

$$\varphi(r)\varphi(s) = vr \underbrace{v^{-1}r^{-1}v}_{\in\langle w,D(t)\rangle\trianglelefteq G,\ abelsch} sv^{-1}s^{-1} = \underline{v(v^{-1}}r^{-1}v)rsv^{-1}s^{-1} = r^{-1} \underbrace{vrsv^{-1}}_{\in\langle w,D(t)\rangle\trianglelefteq G,\ abelsch} s^{-1}$$

$$= (vrsv^{-1}) \underbrace{r^{-1}s^{-1}}_{=s^{-1}r^{-1}} = v(rs)v^{-1}(rs)^{-1} = \varphi(rs),$$ womit alles gezeigt ist. #

2.3.27 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7.
Sei $\varphi : \langle w, D(t)\rangle \to \langle w, D(t)\rangle$ mit $\varphi(r) := vrv^{-1}r^{-1}$. Dann gelten:
(i) $\varphi(\langle w, D(t)\rangle) = [v, \langle w, D(t)\rangle]$. (ii) $|[v, \langle w, D(t)\rangle]| = p$.

Beweis: (i) Folgt direkt aus der Definition von φ.
(ii) Nach 2.3.11 ist $|G : C_G(v)| = p$, womit 2.1.1 liefert, dass $|[v, \langle w, D(t)\rangle]| \leq |[v, G]| = p$ ist. Da nach 2.3.12 der Schnitt $C_G(v) \cap \langle w, D(t)\rangle = D(t)$ ist und $w^k \in D(t)$ erst dann, wenn $k \equiv 0 \pmod p$ ist, sind $\{v, wvw^{-1}, ..., w^{p-1}vw^{-(p-1)}\}$ die p verschiedenen Konjugierten von v, denn es gilt: $w^jvw^{-j} = v \Leftrightarrow w^j \in C_G(v) \Leftrightarrow j \equiv 0 \pmod p$ und somit $w^ivw^{-i} = w^kvw^{-k} \Leftrightarrow i - k \equiv 0 \pmod p$. Also ist $p = |[v, \langle w\rangle]| \leq |[v, \langle w, D(t)\rangle]| \leq p$. #

Als homomorphes Bild einer Gruppe ist $[v, \langle w, D(t)\rangle]$ deshalb ebenfalls eine Gruppe und somit insbesondere abgeschlossen.

2.3.28 Lemma Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
Für $k \in \{0, ..., m-1\}$ und $j \in \{0, ..., p-1\}$ ist $[v^k, w^j] \in [v, \langle w, D(t)\rangle]$.

Beweis: Per Induktion nach k. Für $k = 0$ und $k = 1$ ist bereits alles gezeigt. Die Induktionsannahme ist also, dass für $k \leq n$ die Behauptung bereits gezeigt ist, betrachte $k = n + 1$:

$$[v^{n+1}, w^j] = v^{n+1}w^jv^{-(n+1)}w^{-j} = vv^nw^jv^{-n}\overbrace{w^{-j}v^{-1}vw^j}^{=e}\underbrace{v^{-1}w^{-j}}_{\in[v,\langle w,D(t)\rangle]}$$

$$= v \underbrace{(v^nw^jv^{-n}w^{-j})}_{=:a\in[v,\langle w,D(t)\rangle]\preceq\langle w,D(t)\rangle} v^{-1} \underbrace{(vw^jv^{-1}w^{-j})}_{=:b\in[v,\langle w,D(t)\rangle]} = \underbrace{vav^{-1}a^{-1}}_{\in[v,\langle w,D(t)\rangle]} \overbrace{ab}^{} \in [v, \langle w, D(t)\rangle]. \quad \#$$

2.3.29 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt: $G' = [v, \langle w, D(t)\rangle]$.

Beweis: „$\succeq$“: Klar!
„$\preceq$“: Seien $a, b \in G$ beliebig gewählt, dann sind a, b nach 2.3.7 von der Form $a = v^k w^i d$ und $b = v^l w^j \tilde{d}$ mit $k, l \in \{0, ..., m-1\}$, $i, j \in \{0, ..., p-1\}$ und $d, \tilde{d} \in D(t) = Z(G)$ geeignet.

$$[a,b] = v^k w^i v^l w^j w^{-i} v^{-k} w^{-j} v^{-l} = v^k w^i \underbrace{v^{-k} w^{-i} w^i v^k}_{=e} v^l w^j w^{-i} v^{-k} \underbrace{v^{-l} w^{-j} w^j v^l}_{=e} w^{-j} v^{-l}$$

$$= \underbrace{(v^k w^i v^{-k} w^{-i})}_{=[v^k, w^i]} w^i v^k v^l \underbrace{w^j w^{-i}}_{=w^{-i} w^j} v^{-k} v^{-l} w^{-j} \underbrace{(w^j v^l w^{-j} v^{-l})}_{=[w^j, v^l]}$$

$$= [v^k, w^i](w^i v^{k+l} w^{-i} \underbrace{v^{-(k+l)})(v^{k+l}}_{=e} w^j v^{-(k+l)} w^{-j})[v^l, w^j]^{-1}$$

$$= [v^k, w^i][v^{k+l}, w^i]^{-1}[v^{k+l}, w^j][v^l, w^j]^{-1} \in [v, \langle w, D(t)\rangle] \text{ nach 2.3.28.}$$ #

Aus 2.3.29 und 2.3.27(ii), sowie 1.2.7 erhält man nun folgenden Satz, der eine deutliche Präzisierung von 2.3.21 darstellt:

2.3.30 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gelten:
(i) Es ist $|G'| = p$, G' somit eine zyklische Untergruppe von G.
(ii) G ist metaabelsch (also auflösbar mit Stufe 2).

2.3.31 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
Für alle $g \in G$ mit $|G : C_G(g)| = p$ ist die Menge der Konjugierten von g gerade $G' \cdot g$.

Beweis: Nach 2.1.1 ist $|[G, g]| = p = |G'|$, also ist $[G, g] = G'$, woraus (man beachte, dass $hgh^{-1} = [h, g]g$ ist) die Behauptung folgt. #

Nach 2.3.6 ist G' eine Untergruppe $\langle w, D(t)\rangle$, doch lässt sich G' nun noch etwas genauer lokalisieren:

2.3.32 Satz Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt: $G' \cap Z(G) = \{e\}$.

Beweis: Der Beweis wird per Widerspruch geführt: Sei also $G' \cap Z(G) \neq \{e\}$, dann ist $G' \cap Z(G) = G'$, da G' von primer Ordnung ist, und somit gemäß 1.2.5 zudem $G/Z(G)$ abelsch. Dann ist aber $Z(G/Z(G)) = G/Z(G)$ und G nach Definition 1.2.8 nilpotent, was ein Widerspruch zu 2.3.8 ist. #

Damit ist die Untersuchung von G für den Fall, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler in G, also $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$ ist, beendet, die zuletzt gefundenen Aussagen sollen abschließend noch an einem Beispiel demonstriert werden:

2.3.33 Beispiel Betrachten wir die Gruppe $G := \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Z}_p\}$ mit einer Primzahl $p > 3$ und $|G| = p(p-1)$, dann ist $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+bc^{-1} \\ 0 & a^{-1}c^{-1} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, womit für den Zentralisator eines beliebigen $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c & -abc+a^2d+abc^{-1} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$$

$\iff -abc + a^2d + abc^{-1} = d \iff d(a^2-1) = (c-c^{-1})ab.$

Es können somit folgende Fälle unterschieden werden:

- $c \neq c^{-1}$: Es ist $b = \frac{d}{c-c^{-1}} \cdot \frac{a^2-1}{a}$, somit $|C_G(\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix})| = p-1$, der Index also p.
- $c = c^{-1}, d \neq 0$: Dann ist $a^2d = d$, also $a = a^{-1}$ und somit die Mächtigkeit des Zentralisators ein Vielfaches von p kleiner $p(p-1)$, sein Index also ein nichttrivialer Teiler von $p-1$.
- $c = c^{-1}, d = 0$: Keine einschränkenden Bedingungen, also ist $Z(G) = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} | c = c^{-1}\}$.

Somit hat G die Zentralisatorschranke p. Wählt man z.B. $t := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}$, dann besteht $C_G(t)$ gerade aus den Diagonalmatrizen (weil für $p > 3$ stets $2 \neq 2^{-1}$), hat also Index p. Wähle $w := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so ist $w^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für $1 \leq k \leq p-1$ und $w^p = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C_G(t)$. Da $wC_G(t)w^{-1} \neq C_G(t)$, ist $C_G(t)$ kein Normalteiler von G und man berechnet $D(t)$ zu $D(t) = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} | c = c^{-1}\}$ und damit $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$.
Betrachten wir nun die Kommutatorgruppe von G. Für einen beliebigen Kommutator gilt:

$$[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 1 & (a^2-1)cd - (c^2-1)ab \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

damit kann die Kommutatorgruppe für beliebiges p bestimmt werden:
Man zeigt leicht, dass $U := \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{Z}_p\}$ eine Untergruppe von G ist, und zwar der Ordnung p, womit es keine nichttriviale Untergruppe von U gibt. Offensichtlich ist G' eine Untergruppe von U, und da für $p > 3$ stets $2 \neq 2^{-1}$ ist, muss der Kommutator $[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$ gleich $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$ sein, womit $G' = U$ gelten muss, also $|G'| = p$ ist, was in Einklang mit 2.3.30 steht.

Betrachten wir nun den Fall, dass $C_G(t) \trianglelefteq G$, also $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$ ist:

Als Einstieg soll ein Satz gezeigt werden, der die beiden Fälle $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$ und $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$ klar voneinander differenziert:

2.3.34 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Dann sind entweder alle Zentralisatoren vom Index p Normalteiler oder keiner.

Beweis: Per Widerspruch! Seien also $t, u \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = p = |G : C_G(u)|$ ist, außerdem sei $C_G(t)$ ein Normalteiler von G, $C_G(u)$ jedoch keiner. Dann ist $D(u) = \bigcap_{g \in G} gC_G(u)g^{-1}$ eine echte Untergruppe von $C_G(u)$, d.h. es gilt: $|G : D(u)| = k \cdot p$ mit $k > 1$, wobei das k sich wieder als Teiler von $p - 1$ herausstellt. Es greift 2.3.19 und liefert $Z(G) = D(u)$. Da nach 2.1.11 das Zentrum einer Gruppe in allen Zentralisatoren enthalten ist, gilt also $D(u) \preceq C_G(u) \cap C_G(t)$, sowie offensichtlich $C_G(u) \not\equiv C_G(t)$. Damit folgt die Behauptung analog dem Beweis von 2.3.17 ab Beweisschritt (iii). #

2.3.35 Korollar Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$. Dann gelten:
(i) Ist $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$, so sind alle Zentralisatoren aus G vom Index p keine Normalteiler.
(ii) Ist $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$, so sind alle Zentralisatoren aus G vom Index p Normalteiler.

Die Aussagekraft dieses Korollars ist nicht zu unterschätzen: Es genügt bereits einen Zentralisator vom Index p zu untersuchen, um damit Rückschlüsse auf alle weiteren Zentralisatoren des Index p ziehen zu können. Ist dieser betrachtete Zentralisator kein Normalteiler, wie es auf den vorangegangenen Seiten der Fall war, so sind generell alle Zentralisatoren des Index p keine Normalteiler; im Lichte dieser Aussage ist beispielsweise der jüngst bewiesene Satz 2.3.17 trivial.
Zudem erhalten wir für den zuvor erörterten Fall noch folgende Ergänzung:

2.3.36 Korollar Sei G gegeben wie in 2.3.7. Dann gilt:
Für alle $g \in G$ mit $|G : C_G(g)| = p$ ist $C_G(g)$ abelsch. [2]

Beweis: Da $C_G(g)$ kein Normalteiler ist, darf er die Kommutatorgruppe nicht enthalten (vgl. 2.3.64), und da diese nach 2.3.30 zyklisch von Ordnung p ist, erhält man $G' \cap C_G(g) = \{e\}$. Damit ist aber auch $[C_G(g), C_G(g)] = \{e\}$ und somit $C_G(g)$ abelsch. #

Im nun zu betrachtenden Fall ($C_G(t) \trianglelefteq G$ bzw. $m := |G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$) sind alle Zentralisatoren vom Index p in G zugleich Normalteiler von G. Die Gruppe G selber lässt sich, nebenbei bemerkt, als das Erzeugnis $\langle w, C_G(t)\rangle$ darstellen, und unser Augenmerk wird sich zu Beginn der Untersuchungen insbesondere auf sämtliche in G vorkommenden Zentralisatoren richten, wozu anfangs eine Reihe von Hilfsaussagen hergeleitet werden:

2.3.37 Lemma Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Sei $C_G(t)$ ein Normalteiler vom Index p in G.
Es existiere also ein $w \in G \setminus D(t)$ mit $w^p \in D(t)$ und $m := |G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$. Dann gilt:
Für alle $x \in G \setminus C_G(t)$ ist $x^p \in C_G(t)$.

Beweis: Für alle $x \notin C_G(t)$ ist $\langle xC_G(t)\rangle$ eine nichttriviale Untergruppe von $\langle wC_G(t)\rangle$, welches von primer Ordnung ist; es folgt deshalb Gleichheit und damit die Behauptung. #
Zudem gilt für alle $1 \leq j < p$, dass $x^j \notin C_G(t)$ ist, vgl. Überlegungen vor 2.3.1.

[2] Eine Konsequenz: Sei $C_G(t)$ abelsch vom Index p, dann ist für alle $g \in C_G(t) \setminus Z(G)$ gerade $C_G(g) \equiv C_G(t)$. Denn: Da $C_G(t)$ maximal ist, resultiert die Aussage aus der Ungleichung $C_G(t) \preceq C_G(g) \prec G$.

2.3.38 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Dann gilt:
Für alle $x \in G \setminus C_G(t)$ ist $|G : C_G(x)| = p$.

Beweis: Sei $x \in G \setminus C_G(t)$ beliebig bestimmt. Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten:
(i) Es sind $\{t, xtx^{-1}, ..., x^{p-1}tx^{-(p-1)}\}$ die p verschiedenen Konjugierten von t (vgl. 2.1.1).
Bew.: Es ist $x^j tx^{-j} = t \iff x^j \in C_G(t) \iff j = 0$ für $j = 0, ..., p-1$, sowie $x^k tx^{-k} = x^l tx^{-l} \iff x^{k-l}tx^{-(k-l)} = t \iff k - l = 0$ für $0 \leq l < k \leq p-1$, was ein Widerspruch zu $k > l$ ist. $\surd$
(ii) $|G : C_G(xt)| = p$ und $C_G(xt) \trianglelefteq G$.
Bew.: Sei $k \in \{0, ..., p-1\}$ beliebig gewählt, dann ist $x^k(xt)x^{-k} = x^k x \underbrace{x^{-k}x^k}_{=e} tx^{-k} = x \cdot (x^k tx^{-k})$, was wegen (i) bedeutet, dass xt mindestens p verschiedene Konjugierte hat, also wegen der Zentralisatorschranke p und 2.1.1 sogar genau p Konjugierte. Ergo resultiert (wieder 2.1.1): $|G : C_G(xt)| = p$, und nach 2.3.35 sogar $C_G(xt) \trianglelefteq G$. $\surd$
(iii) $|G : C_G(x)|$ teilt $|G : (C_G(xt) \cap C_G(t))|$.
Bew.: Es ist $C_G(t^{-1}) = C_G(t)$ und somit (da $x = (xt) \cdot t^{-1}$) auch $C_G(xt) \cap C_G(t) \preceq C_G(x)$, womit folgt, dass $|G : C_G(x)|$ ein Teiler von $|G : (C_G(xt) \cap C_G(t))|$ ist. $\surd$
(iv) $C_G(xt) \not\equiv C_G(t)$.
Bew.: Per Widerspruch! Sei also $C_G(xt) \equiv C_G(t)$, dann ist $xt \in C_G(t)$ und sowieso $t^{-1} \in C_G(t)$, was bedeutet, dass auch $x \in C_G(t)$ ist. Dies aber ist ein Widerspruch! $\surd$
Mit (ii), 1.3.2 und 1.1.8 erhält man folgende Gleichung: $p^2 = |G : C_G(t)| \cdot |G : C_G(xt)| = |G : C_G(t)| \cdot |\underbrace{C_G(t)C_G(xt)}_{=G}/C_G(xt)| = |G : C_G(t)| \cdot |C_G(t)/(C_G(t) \cap C_G(xt))| = |G : (C_G(t) \cap C_G(xt))|$, was nach (iii) bedeutet, dass $|G : C_G(x)|$ ein Teiler von p^2 ist. Auf Grund der Zentralisatorschranke p kann $|G : C_G(x)|$ nur gleich 1 oder gleich p sein. Da aber $|G : C_G(x)| = 1$ bedeutet, dass $x \in Z(G) \preceq C_G(t)$ ist, folgt die Behauptung. #

Ist der Zentralisator eines Elementes echt verschieden von der betrachteten Gruppe, so ist der Zentralisator stets echt größer als das Zentrum[3]. Somit ist im betrachteten Fall insbesondere $C_G(t) \not\equiv Z(G)$. Damit ist die im folgenden Lemma benötigte Existenzaussage gesichert:

2.3.39 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann existiert für jedes $x \in C_G(t) \setminus Z(G)$ ein $y \in G \setminus C_G(t)$ derart, dass $x \notin C_G(y)$ ist.

Beweis: Per Widerspruch! Sei $x \in C_G(t) \setminus Z(G)$ beliebig bestimmt, sei $x \in C_G(y)$ für alle $y \in G \setminus C_G(t)$, so ist x mit allen Elementen aus $G \setminus C_G(t)$ vertauschbar, also $G \setminus C_G(t) \subseteq C_G(x)$. Somit ist $\langle G \setminus C_G(t) \rangle \preceq C_G(x)$.
Seien nun $a \in G \setminus C_G(t)$ und $b \in C_G(t)$ beliebig, dann ist $(ab)t(ab)^{-1} = a(\underbrace{btb^{-1}}_{=t})a^{-1} = ata^{-1} \neq t$ und somit $ab \in G \setminus C_G(t)$. Damit folgt aber $b = \underbrace{a^{-1}}_{\notin C_G(t)} (\underbrace{ab}_{\notin C_G(t)}) \in \langle G \setminus C_G(t) \rangle$ und hiermit $C_G(t) \preceq \langle G \setminus C_G(t) \rangle$. Dies aber ist nur möglich, wenn $\langle G \setminus C_G(t) \rangle = G$ ist, was nun wiederum aber zur Folge hat, dass $C_G(x) = G$, also $x \in Z(G)$ ist. Dies ist ein Widerspruch! #

[3]Man zeigt dies per Widerspruch! Wäre $C_G(g) \equiv Z(G)$, so wäre $g \in Z(G)$ und damit $C_G(g) = G$, was ein Widerspruch ist!

2.3.40 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Dann gilt:
Für alle $x \in C_G(t) \setminus Z(G)$ ist $|G : C_G(x)| = p$ und $y^p \in C_G(x)$ für alle $y \notin C_G(x)$.

Beweis: Nach 2.3.39 existiert stets ein $y \in G \setminus C_G(t)$ mit $x \notin C_G(y)$. Gemäß 2.3.38 und 2.3.35 ist dann $|G : C_G(y)| = p$ und $C_G(y) \trianglelefteq G$. Damit resultiert aus 2.3.37 und 2.3.38 die Behauptung. #

Nach diesen zahlreichen Hilfssätzen kann nun endlich „die Ernte eingefahren“ werden:

2.3.41 Satz Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37, so gilt für alle $x \in G \setminus Z(G)$:
Es ist $|G : C_G(x)| = p$, $C_G(x) \trianglelefteq G$, und für beliebiges $y \notin C_G(x)$ gilt stets $y^p \in C_G(x)$.

Beweis: Resultat aus 2.3.37, 2.3.38, 2.3.40 und 2.3.35. #

Und als weitere Konsequenz erhält man:

2.3.42 Korollar Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Dann gilt:
(i) Für alle $g \in G$ ist $G' \preceq C_G(g)$.
(ii) $G' \preceq Z(G)$.
(iii) Für alle $x, y, z \in G$ ist $[x, [y, z]] = e$.

Beweis: (i) Ist $g \in Z(G)$, so ist $C_G(g) = G \succeq G'$.
Ist $g \notin Z(G)$, so beträgt nach 2.3.41 die Mächtigkeit $|G/C_G(g)| = p$, also ist $G/C_G(g)$ zyklisch und abelsch. 1.2.5 liefert die Behauptung.
(ii) $G' \preceq \bigcap_{g \in G} C_G(g) = Z(G)$.
(iii) Es ist nach (ii) für alle $y, z \in G$ der Kommutator $[y, z] \in Z(G)$, also ist $[y, z]$ mit jedem $x \in G$ vertauschbar; somit ergibt sich für den Kommutator
$[x, [y, z]] = x[y, z]\underline{x^{-1}[y, z]^{-1}} = x[y, z][y, z]^{-1}x^{-1} = e$. #

Letzteres beinhaltet natürlich auch, dass für alle $x, y \in G$ der Kommutator $[x, [x, y]] = e$ ist. Diese Eigenschaft ist auch als *2-Engelbedingung* bekannt.
Halten wir kurz fest: Existiert in einer Gruppe G mit primer Zentralisatorschranke p ein normaler Zentralisator vom Index p, so sind alle nichttrivialen Zentralisatoren vom Index p und somit Normalteiler in G. Des Weiteren liegt in diesem Fall die Kommutatorgruppe im Zentrum, Kommutatoren der Länge 3 verschwinden also. Nach 1.2.12 folgt für G somit Nilpotenz von Klasse 2:

2.3.43 Satz Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: G ist nilpotent von Klasse 2.

Nilpotenz musste im eingangs betrachteten Fall ausgeschlossen werden, dafür ließ sich Auflösbarkeit der Stufe 2 zeigen, welche auch hier vorliegt:

2.3.44 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Dann ist G auflösbar von Stufe 2, also metaabelsch.

Beweis: Sei $w \in G\backslash D(t)$ mit $w^p \in D(t)$. Ist $m := |G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$, so folgt die Behauptung aus 2.3.21 und 2.3.30, ist $m := |G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$, so ist nach 2.3.42(ii) die Kommutatorgruppe $G' \preceq Z(G)$, also G' abelsch. Da offensichtlich $[w, t] \neq e$ ist, ist G' nicht trivial, womit sich nach 1.2.3 und 1.2.7 die Behauptung ergibt. #

Eine prime Zentralisatorschranke ist eine hinreichende Bedingung für Auflösbarkeit!

2.3.45 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Dann gilt:
Für alle $x \in G \setminus Z(G)$ ist $x^p \in Z(G)$.

Beweis: Seien $x, g \in G$ beliebig gewählt. Dann ist entweder $x \in C_G(g)$, also auch $x^p \in C_G(g)$, oder $x \notin C_G(g)$, dies hat aber nach 2.3.41 wieder $x^p \in C_G(g)$ als Konsequenz. Somit ist stets $x^p \in C_G(g)$ für beliebiges $g \in G$, ergo $x^p \in \bigcap_{g\in G} C_G(g) = Z(G)$. #

Eine äquivalente Formulierung dazu: Die Faktorgruppe $G/Z(G)$ hat den Exponenten[4] p.

2.3.46 Korollar Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Dann gilt:
Für alle $x \in G \setminus Z(G)$ ist $C_G(x^k) = C_G(x)$, wenn $k \not\equiv 0 \pmod p$,
oder $C_G(x^k) = G$, wenn $k \equiv 0 \pmod p$.

Beweis: Für alle $x \notin Z(G)$ ist $C_G(x)$ nach 2.3.41 eine maximale Untergruppe, nach 2.1.10 ist $C_G(x) \preceq C_G(x^k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Das vorige Lemma 2.3.45 liefert:
$C_G(x^k) = G \;\Leftrightarrow\; x^k \in Z(G) \;\Leftrightarrow\; k \equiv 0 \pmod p$. #

Nun wollen wir uns ein wenig mit den Mächtigkeiten von G und $Z(G)$ beschäftigen und werden schließlich für beide jeweils eine untere Schranke erhalten:

2.3.47 Satz Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: p^2 teilt $|G : Z(G)|$, $|Z(G)| \geq p$ und $|G| \geq p^3$.

Beweis: Es ist $Z(G) \preceq C_G(w) \cap C_G(t)$ und

$$p^2 = |G : C_G(t)| \cdot |\underbrace{C_G(t)C_G(w)}_{=G}/C_G(w)| = |G : (C_G(w) \cap C_G(t))|$$

mit 1.3.2 und 1.1.8, ergo p^2 ein Teiler von $|G : Z(G)|$.
Somit ist p^2 natürlich auch ein Teiler von $|G|$, und da G nicht abelsch ist, folgt sogar $|G| > p^2$.
Nach 2.3.42(ii) ist $Z(G) \succeq G'$, und für dessen Mächtigkeit gilt nach 2.1.1(iii) gerade $|G'| \geq p$.
Damit folgt der Rest der Behauptung. #

Der Beweis zeigt auch: Für $a, b \notin Z(G)$ mit $C_G(a) \not\equiv C_G(b)$ ist $|C_G(a) : (C_G(a) \cap C_G(b))| = p$.
Diese Abschätzungen sind vorallem dann interessant, wenn man zu gegebener Primzahl p eine Gruppe mit solcher Zentralisatorschranke konstruieren will.
Betrachten wir die Faktorgruppe $G/Z(G)$, müssen wir uns keine Gedanken mehr zur Ordnung

[4] Unter dem *Exponenten* einer Gruppe H versteht man die kleinste natürliche Zahl n mit $H^n = \{e\}$.

der einzelnen Elemente machen, ergab doch 2.3.45, dass $G/Z(G)$ den Exponenten p hat. Zudem ist $G/Z(G)$ abelsch, wie im Beweis von 2.3.43 gezeigt wurde.
Damit kann nun eine wichtige Aussage über $G/Z(G)$ gemacht werden:

2.3.48 Satz Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: Ist $G/Z(G)$ endlich, so ist $G/Z(G)$ elementarabelsch[5].

Beweis: $G/Z(G)$ besteht neben dem neutralen Element nur aus Elementen der Ordnung p, wobei verschiedene zyklische Untergruppen der Ordnung p stets trivialen Schnitt haben und offensichtlich Normalteiler sind ($G/Z(G)$ abelsch!). Auf Grund der Endlichkeit von $G/Z(G)$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $G/Z(G)$ gemäß 1.1.17 isomorph zu $\underbrace{\mathbb{Z}_p \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}_p}_{n-mal}$ ist. #

Abschließend soll auch hier wieder die Kommutatorgruppe von G etwas genauer untersucht werden, wozu erst ein paar Eigenschaften des Kommutators aufgelistet werden:

2.3.49 Lemma Sei G eine Gruppe, dann gilt für alle $a, b, c \in G$:
(i) $[a, bc] = [a, b][b, [a, c]][a, c]$. (ii) $[ab, c] = [a, [b, c]][b, c][a, c]$.

Beweis: (i) $[a, b][b, [a, c]][a, c] = [a, b]b[a, c]b^{-1}\underline{[a, c]^{-1}[a, c]} = ab\underline{a^{-1}b^{-1}ba}ca^{-1}c^{-1}b^{-1} = [a, bc]$.
(ii) $[a, [b, c]][b, c][a, c] = a[b, c]a^{-1}\underline{[b, c]^{-1}[b, c]}[a, c] = abcb^{-1}\underline{c^{-1}a^{-1}ac}a^{-1}c^{-1} = [ab, c]$. #

2.3.50 Korollar Sei G eine Gruppe mit $G' \preceq Z(G)$ (nilpotent der Klasse 2), dann gilt für alle $a, b, c \in G$:
(i) $[a, bc] = [a, b][a, c]$. (ii) $[ab, c] = [a, c][b, c]$. (iii) $[a^n, b] = [a, b]^n = [a, b^n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (i) und (ii) folgen direkt aus 2.3.49.
(iii) folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus (i) bzw. (ii) per Induktion. Für $n = 0$ ist die Aussage trivial. Bleibt die Aussage noch für $-n$ zu zeigen. Mit (ii) resultiert die Behauptung gemäß
$e = [a^n a^{-n}, b] = [a^n, b][a^{-n}, b] = [a, b]^n[a^{-n}, b]$. #

Nach 2.3.42(ii) sind im betrachteten Fall die Voraussetzungen von 2.3.50 gerade erfüllt, womit Kommutatoren auf diese Art faktorisiert werden können.
Damit können wir die Kommutatorgruppe von G etwas genauer charakterisieren:
Für alle $g, h \in G$ mit $[g, h] \neq e$ ist nach 2.3.50 gerade $[g, h]^p = [g^p, h] = e$, da $g^p \in Z(G)$ ist (vgl. 2.3.45); somit ist $\langle [g, h] \rangle$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung p. Die Frage der Existenz eines solchen Kommutators wird gelöst durch $[w, t]$, denn es ist $w \notin C_G(t)$, also $wtw^{-1} \neq t$ und somit $[w, t] \neq e$, also $\langle [w, t] \rangle$ eine zyklische Untergruppe der Ordnung p.
Des Weiteren ist $(G')^p = \{e\}$, d.h. es gilt:

2.3.51 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: G' hat den Exponenten p.

[5]Sei A eine abelsche Gruppe der Ordnung p^n mit einer Primzahl p und $n \in \mathbb{N}$. A heißt *elementarabelsch*, wenn $A \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \otimes \ldots \otimes \mathbb{Z}_p}_{n-mal}$ ist.

2.3.52 Lemma Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: Für alle $g \in G$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist $[g, t^z] \in \langle [w,t] \rangle$ und $[g, w^z] \in \langle [w,t] \rangle$.

Beweis: Wie im Beweis von 2.3.51 bereits gezeigt, ist $\langle [w,t] \rangle$ zyklische Gruppe der Ordnung p. Da $|G : C_G(t)| = p = |G : C_G(w)|$ ist, liefert 2.1.1 nun $|[t,G]| = p = |[w,G]| = |\langle [w,t] \rangle|$, wegen 2.3.50(iii) erhält man $[t,G] = \langle [w,t] \rangle = [w,G]$ und somit die Behauptung. #

Damit ist es nun möglich, die Kommutatorgruppe G' genau zu bestimmen, woraus dann wiederum einige interessante Folgerungen abgeleitet werden können:

2.3.53 Satz Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: $G' = \langle [w,t] \rangle$.

Beweis: Der Beweis wird per Widerspruch geführt. Angenommen also, G' wäre echt größer als $\langle [w,t] \rangle$, dann existiert ein Kommutator $[a,b] \in G'$ mit $[a,b] \notin \langle [w,t] \rangle$, was $[a,b] \neq e$ beinhaltet. Somit ist nach 2.3.51 das Erzeugnis $\langle [a,b] \rangle$ zyklisch der Ordnung p und hat trivialen Schnitt mit $\langle [w,t] \rangle$. Da $a, b \notin Z(G)$ sein können, haben ihre Zentralisatoren den Index p (vgl. 2.3.41), womit analog dem Beweis von 2.3.50(iii) gezeigt werden kann, dass für alle $g \in G$ stets $[g,a] \in \langle [a,b] \rangle$ ist. Dann muss der Kommutator $[a,w]$ jedoch in $\langle [w,t] \rangle \cap \langle [a,b] \rangle$ liegen (siehe 2.3.52), weswegen $[a,w] = e$ resultiert.
Betrachte nun die Untergruppe $U := \langle a, b, w, t \rangle \preceq G$, dann ist nach 2.1.5 für alle $u \in U$ auch $|U : C_U(u)| \leq p$, weil aber t seine p verschiedenen Konjugierten $\{t, wtw^{-1}, ..., w^{p-1}tw^{-(p-1)}\}$ in U liegen hat, gilt $|U : C_U(t)| = p$.
Da $b^k ab^{-k} = a \;\Leftrightarrow\; e = [b^k, a] = [b,a]^k \;\Leftrightarrow\; k \equiv 0 \pmod p$ ist, folgt auch $|U : C_U(a)| = p$.
Man betrachte nun den Zentralisator $C_U(at)$: Für beliebiges $g \in C_U(at)$ ergibt sich:
$g \in C_U(at) \;\Leftrightarrow\; e = [at, g] = \underbrace{[a,g]}_{\in\langle [a,b] \rangle} \underbrace{[t,g]}_{\langle [w,t] \rangle} \;\Leftrightarrow\; [t,g] = [a,g]^{-1}$, was aber nur möglich ist für $[t,g] = e = [a,g]$. Also muss jedes $g \in C_U(at)$ sowohl mit a als auch mit t vertauschbar sein und man erhält $C_U(at) = C_U(a) \cap C_U(t)$. Hierbei beachte man, dass $C_U(a) \not\equiv C_U(t)$ gilt, denn es ist $[a,w] = e$, also $w \in C_U(a)$, aber $w \notin C_U(t)$.
Also ist $p \geq |G : C_U(at)| = |G : (C_U(a) \cap C_U(t))| = \underbrace{|G : C_U(a)|}_{=p} \cdot \underbrace{|C_U(a) : (C_U(a) \cap C_U(t))|}_{=p,\ vgl.\ Beweis\ zu\ 2.3.47} = p^2$,
was ein Widerspruch ist! #

Diese Aussage lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass für alle $g, h \in G$ mit $[g,h] \neq e$ gilt, dass $G' = \langle [g,h] \rangle$ (und $G = \langle g, C_G(h) \rangle$) ist. Auf jeden Fall folgt nun aus 2.3.30, 2.3.53 und 2.3.51:

2.3.54 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Zentralisatorschranke p hat, wobei p eine Primzahl ist. Dann ist $|G'| = p$.

Eine prime Zentralisatorschranke p ist hinreichend für eine zyklische Kommutatorgruppe der Ordnung p.

Auch die Menge der Konjugierten eines beliebigen Gruppenelementes kann nun genauer angegeben werden, denn analog zum Beweis von 2.3.31 erweist sich:

2.3.55 Korollar Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37.
Dann gilt: Für alle $g \in G \setminus Z(G)$ ist die Menge der Konjugierten gleich $G' \cdot g$.

Bevor all diese Aussagen anhand einiger Beispiele verifiziert werden, soll noch kurz ein Blick auf die Struktur der endlichen nilpotenten Gruppen mit Zentralisatorschranke p geworfen werden, dazu folgender Satz aus Huppert [4], Seite 260:

2.3.56 Satz Eine endliche Gruppe G ist nilpotent genau dann, wenn G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen ist.

Aus 2.1.1(iv) und 2.2.1 folgt somit:

2.3.57 Korollar Sei G eine Gruppe mit den Voraussetzungen von 2.3.37. Sei G zudem endlich. Dann ist G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.
Die p-Sylowgruppe von G hat die Zentralisatorschranke p, alle übrigen Sylowgruppen sind abelsch.

2.3.58 Beispiel Beginnen wir mit der Diedergruppe $G := D_4$. Aus der Verknüpfungstafel

	e	d	d²	d³	s	sd	sd²	sd³	I
e	e	d	d²	d³	s	sd	sd²	sd³	1
d	d	d²	d³	e	sd³	s	sd	sd²	2
d²	d²	d³	e	d	sd²	sd³	s	sd	1
d³	d³	d	e	d²	sd	sd²	sd³	s	2
s	s	sd	sd²	sd³	e	d	d²	d³	2
sd	sd	sd²	sd³	s	d³	e	d	d²	2
sd²	sd²	sd³	s	sd	d²	d³	e	d	2
sd³	sd³	s	sd	sd²	d	d²	d³	e	2

Abbildung 2.3: Verknüpfungstafel zu D_4

entnimmt man, dass die Zentralisatorschranke $p = 2$ ist und wählt nun beispielsweise $t := d$ mit $C_G(t) = \langle d \rangle \trianglelefteq G$.
Es ist $w := s \notin C_G(t)$, sehr wohl aber $w^2 \in C_G(t)$ und $G = \langle w, C_G(t) \rangle$.
Es treten die drei verschiedenen (nichttrivialen) Zentralisatoren $C_G(d) = C_G(d^3) = \{e, d, d^2, d^3\}$, $C_G(s) = C_G(sd^2) = \{e, d^2, s, sd^2\}$ und $C_G(sd) = C_G(sd^3) = \{e, d^2, sd, sd^3\}$ auf, welche (leicht nachprüfbar) tatsächlich allesamt Normalteiler von G sind (vgl. 2.3.35).
Das Zentrum von G ist $Z(G) = \{e, d^2\}$ und gleich der Kommutatorgruppe von G ($[s, d] = d^2$), was in Einklang mit 2.3.42(ii), 2.3.53 und 2.3.54 steht.
Zudem ist $|G| = p^3$, $|Z(G)| = p$, $|G : Z(G)| = p^2$, all' dies in Übereinstimmung mit 2.3.47.

Die Faktorgruppe $G/Z(G) = \{Z(G), dZ(G), sZ(G), sdZ(G)\}$ enthält $p+1$ verschiedene zyklische Untergruppen der Ordnung p, nämlich $\langle dZ(G)\rangle$, $\langle sZ(G)\rangle$ und $\langle sdZ(G)\rangle$, und ist isomorph zu $\langle sZ(G)\rangle \otimes \langle dZ(G)\rangle$, also elementarabelsch.

2.3.59 Beispiel Nach Huppert [4], Seite 90f, ist für eine Primzahl $p > 2$ und eine natürliche Zahl $n \geq 2$ durch $G := \langle s, d\rangle$ mit $ord(s) = p$, $ord(d) = p^n$ und $ds = sd^{1+p^{n-1}}$ eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung p^{n+1} mit einem zyklischen Normalteiler $\langle d\rangle$ der Ordnung p^n gegeben. Betrachten wir diese Gruppe ein wenig genauer:
Es ist $ds^2 = (ds)s = sd^{1+p^{n-1}}s = s^2d^{(1+p^{n-1})^2} = s^2d^{1+2p^{n-1}+p^{2n-2}} = s^2d^{1+2p^{n-1}}$, da die Exponenten modulo p^n zu nehmen sind.
Allgemein erhält man für $k \in \{0, ..., p^n - 1\}$ und $j \in \{0, ..., p-1\}$:

$$d^k s^j = s^j d^{k+k\cdot j\cdot p^{n-1}} \qquad \text{und} \qquad (s^j d^k)^{-1} = d^{-k}s^{-j} = s^{-j}d^{-k+k\cdot j\cdot p^{n-1}}.$$

Damit ergibt sich ein beliebiges Konjugiertes bzw. der Kommutator zu

$$(s^jd^k)(s^id^l)(s^jd^k)^{-1} = s^id^{l+(ki-lj)p^{n-1}} \qquad \text{und} \qquad [s^jd^k, s^id^l] = d^{(ki-lj)p^{n-1}}.$$

Die Wahl von $j = 0$ und $i = 1$ zeigt, dass $|G'| = p$ ist, also, wie wir im Anschluß in Satz 2.3.63 zeigen werden, die Gruppe G tatsächlich die Zentralisatorschranke p hat.
Betrachten wir den Spezialfall $n = 2$, so erhalten wir folgende Ergebnisse:
Es ist $Z(G) = \{e, d^p, d^{2p}, ..., d^{(p-1)p}\} = G'$, womit G nilpotent der Klasse 2 und auflösbar von Stufe 2 ist, für die verbleibenden Elemente ist der Index des Zentralisators jeweils p:

- $C_G(d^k) = \langle d\rangle$ für $k \not\equiv 0 \pmod p$.
- $C_G(s^jd^k) = \{s^id^l | (ki - lj) \equiv 0 \pmod p\}$ für $1 \leq j \leq p-1$.

Da $|G| = p^3$ und $|Z(G)| = p$ ist, ist $G/Z(G)$ auf jeden Fall abelsch, besitzt allerdings nur Elemente der Ordnung $\leq p$, womit diese Faktorgruppe sogar elementarabelsch ist. Auch an diesem Beispiel können wir die zuvor gefundenen Ergebnisse verifizieren.

2.3.60 Beispiel Sei $\mathbb{K}_p$ ein Körper mit p Elementen, p Primzahl, sei 0 das neutrale Element der Addition, sei 1 das neutrale Element der Multiplikation. Betrachten wir die Menge

$$G := \{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & a \\ & \ddots & & 0 & x_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & x_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | x_1, ..., x_{2n}, a \in \mathbb{K}_p, n \in \mathbb{N}\},$$ so ergeben sich für

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_n & a \\ & \ddots & & 0 & x_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & x_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_n & b \\ & \ddots & & 0 & y_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & y_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:B} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_j + y_j & \dots & a + b + \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} \\ & \ddots & & 0 & x_{n+1} + y_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & x_{2n} + y_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & \dots & -x_n & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i x_{n+i} - a \\ & \ddots & & 0 & -x_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & -x_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit zeigt man leicht, dass G eine Gruppe der Ordnung p^{2n+1} ist. Das Konjugierte ist

$$ABA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_n & b + \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) \\ & \ddots & & 0 & y_{n+1} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & y_{2n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

womit $A \in C_G(B)$ ist genau dann, wenn $\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) = 0$ gilt.
Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden:

- $\exists_{j \in \{1,\dots,2n\}}\ y_j \neq 0$: O.B.d.A. sei $j \in \{1, ..., n\}$, dann ist $x_{n+j} = \frac{1}{y_j} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_{n+i} y_i)$ zu wählen, alle übrigen x_i sowie a sind frei wählbar, also ist $|C_G(A)| = p^{2n}$ und deshalb $|G : C_G(A)| = p$.
- $\forall_{j=1}^{2n}\ y_j = 0$: Dann ist A frei wählbar, also ist

$$Z(G) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | b \in \mathbb{K}_p \}.$$

Dies entspricht 2.3.41 und 2.3.47, zudem ist $G' \preceq Z(G)$ und $|G'| = p$ (vgl. 2.3.42(ii) und 2.3.54), denn es gilt:

$$[A, B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i) \\ & \ddots & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

und für $y_1 = ... = y_{2n-1} = 0$, $y_{2n} = 1$, $x_n = 1$ ist $[A, B] \neq E$, womit $G' = Z(G)$ sein muss, also $|G'| = |Z(G)| = p$ ist.

2.3.61 Zusammenfassung Verfügt eine Gruppe G über eine prime Zentralisatorschranke p, so ist G auflösbar der Stufe 2 und seine Kommutatorgruppe G' zyklisch der Ordnung p. Aber man kann noch detailliertere Aussagen treffen:
Nach Definition muss ein $t \in G$ existieren mit $|G : C_G(t)| = p$ und man kann den Normalteiler $D(t) = \bigcap_{g \in G} gC_G(t)g^{-1}$ gemäß 2.1.9 bilden; dieser Normalteiler besitzt dann den Index $p \cdot m$, wobei m ein Teiler von $p-1$ ist. Damit konnte der dieser Arbeit praktisch als „Ausgangspunkt" zu Grunde liegende Satz 2.1.8 für den vorliegenden Fall deutlich präzisiert werden.
Nun findet man ein Element $w \in G \setminus D(t)$ derart, dass w^p in $D(t)$ liegt und $\langle w, D(t)\rangle$ stellt sich als Normalteiler des Index m (m wie oben) heraus. Nun unterscheidet man zwei Fälle:
- $|G : \langle w, D(t)\rangle| > 1$: In diesem Fall ist $G/\langle w, D(t)\rangle$ zyklisch der Ordnung m, so dass ein $v \in G$ existiert mit $G = \langle v, w, D(t)\rangle$. G ist nicht nilpotent und keiner der Zentralisatoren vom Index p ein Normalteiler. $D(t)$ ist gleich dem Zentrum von G, welches mit der Kommutatorgruppe G' trivialen Schnitt hat, G' also insbesondere nicht in $Z(G)$ gelegen ist. Sämtliche Zentralisatoren des Index p sind abelsch und der Zentralisator $C_G(w) = \langle w, D(t)\rangle$ ist sogar abelscher Normalteiler.
- $|G : \langle w, D(t)\rangle| = 1$: In diesem Fall ist $G = \langle w, C_G(t)\rangle$. G ist nilpotent der Klasse 2, d.h. die Kommutatorgruppe G' liegt im Zentrum von G, und alle Zentralisatoren von G sind Normalteiler, wobei die Zentralisatoren entweder den Index p haben oder gleich G sind; anders formuliert: Für alle Elemente außerhalb des Zentrums hat der Zentralisator den Index p. Die Faktorgruppe $G/Z(G)$ ist (im Falle der Endlichkeit) elementarabelsch.

Aus einer primen Zentralisatorschranke p folgen somit eine Reihe von Eigenschaften für die Gruppe, dabei auch, dass die Kommutatorgruppe G' zyklisch der Ordnung p ist; abschließend soll nun einerseits noch gezeigt werden, dass bei letzterer Eigenschaft auch die Umkehrung gilt, d.h. dass aus $|G'| = p$ auch folgt, dass G die Zentralisatorschranke p hat, andererseits soll ein Kriterium für Nilpotenz bestimmt werden. Dazu benötigen wir folgendes Lemma:

2.3.62 Lemma Ist der Kommutator $[a, b]$ vertauschbar mit a, so gilt für alle $z \in \mathbb{Z}$, dass $[a^z, b] = [a, b]^z$ ist.

Beweis: Für $z = 0$ und $z = 1$ ist die Behauptung trivial und kann als Induktionsanfang genutzt werden, um die Aussage für $z \in \mathbb{N}_0$ zu beweisen. Sei die Behauptung also für alle $z \leq n \in \mathbb{N}$ gezeigt, dann ergibt sich mit 2.3.49:
$$[a^{n+1}, b] = [a^n a, b] = \underbrace{[a^n, [a, b]]}_{=e,\text{ da } [a,b] \text{ mit } a \text{ vertauschbar}} \cdot [a, b] \cdot \underbrace{[a^n, b]}_{=[a,b]^n \text{ nach Induktionsvoraussetzung}} = [a, b]^{n+1}.$$
Außerdem ist analog $e = [a^{-z}a^z, b] = [a^{-z}, [a^z, b]] \cdot [a^z, b] \cdot [a^{-z}, b] = e \cdot [a, b]^z \cdot [a^{-z}, b]$, womit die Behauptung folgt. #

2.3.63 Satz Sei p eine Primzahl. Eine Gruppe G hat die Zentralisatorschranke p genau dann, wenn $|G'| = p$ ist.

Beweis: „$\Rightarrow$": Siehe 2.3.54.
„$\Leftarrow$": Da $|G'| = p$ ist, ist $G' = \langle [a, b]\rangle$ zyklisch. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:
- $[G, G'] = \{e\}$: Dann liegt G' im Zentrum von G, womit 2.3.50 liefert: $[a, b]^n = [a, b^n]$ und somit $|[a, G]| = p$, was mit 2.1.1 die Behauptung liefert.
- $[G, G'] \neq \{e\}$: Dann existieren ein $x \in G'$ und $g \in G$ so, dass $[g, x] \neq e$ ist, aber $[g, x]$ und x sind vertauschbar (G' abelsch); somit ist nach 2.3.62 $[g, x^n] = [g, x]^n$ und damit $|[g, G]| = p$, was mit 2.1.1 die Behauptung liefert. #

Fahren wir fort mit folgendem Lemma, das als Ergänzung zu 1.2.5 betrachtet werden kann:

2.3.64 Lemma Sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe in G, welche die Kommutatorgruppe G' enthält, dann ist $U \trianglelefteq G$ und G/U abelsch.

Beweis: Sei $u \in U$ beliebig gewählt, dann gilt:
$\forall_{g\in G}\ [g,u] \in U \ \Leftrightarrow\ \forall_{g\in G}(gug^{-1})u^{-1} \in U \ \Leftrightarrow\ \forall_{g\in G}\ gug^{-1} \in U \ \Leftrightarrow\ U \trianglelefteq G.$ #

Beschließen wir diesen Abschnitt mit einigen Überlegungen zur eingangs gebildeten Faktorgruppe $G/D(t)$. Schon für einen beliebigen Normalteiler N einer beliebigen Gruppe G mit endlicher Kommutatorgruppe gilt, dass die Ordnung von $(G/N)'$ ein Teiler von $|G'|$ ist, denn nach 1.3.2 ist $(G/N)' = G'N/N \cong G'/(G' \cap N)$. Hat G also die Zentralisatorschranke p, so ist $|G'| = p$, also $|(G/N)'|$ entweder gleich 1 oder p. Gleiches zeigt man für Untergruppen, d.h. man kann 2.1.5 wie folgt verschärfen:

2.3.65 Satz Sei G eine Gruppe mit primer Zentralisatorschranke p, sei N ein beliebiger Normalteiler, U eine beliebige Untergruppe in G. Dann hat G/N (bzw. U) entweder die Zentralisatorschranke p oder ist abelsch.

Es ergibt sich damit folgendes Kriterium für Nilpotenz (als Verstärkung der anschließend angeführten, allgemein gültigen Aussage):

2.3.66 Satz Sei G eine Gruppe mit primer Zentralisatorschranke p, sei $C_G(t)$ ein Zentralisator vom Index p in G, dann gilt:
G nilpotent $\Longleftrightarrow$ $G/D(t)$ nilpotent $\Longleftrightarrow$ $C_G(t) \trianglelefteq G$.

Beweis: Sei $G/D(t)$ nilpotent. Angenommen, $G/D(t)$ hätte die Zentralisatorschranke p, dann wäre $G/D(t)$ von Klasse 2, somit $G/Z(G)$ ebenfalls mindestens von Klasse 2 und G mindestens von Klasse 3, falls diese beiden überhaupt nilpotent sind (vgl. 1.2.12). Nilpotenz mit einer Klasse von mindestens 3 ist aber gar nicht möglich (vgl. 2.3.8 und 2.3.43), weshalb G nicht nilpotent ist. Dann aber ist $D(t) = Z(G)$ (siehe 2.3.19), also $G/Z(G)$ nilpotent von Klasse 2, womit man, im Widerspruch zu eben gemachter Feststellung, doch wieder erhalten würde, dass G nilpotent von Klasse 3 wäre.
Somit muss $G/D(t)$ nach 2.3.65 abelsch sein, d.h. G' läge nach 1.2.5 in $D(t) \preceq C_G(t)$, womit $C_G(t)$ gemäß 2.3.64 ein Normalteiler ist. Nach 2.3.43 ist G somit nilpotent von Klasse 2.
Die verbleibenden Richtungen wurden bereits gezeigt. #

2.3.67 Satz Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke $n \in \mathbb{N}$. Es ist G nilpotent genau dann, wenn $G/D(g)$ nilpotent ist für alle $g \in G$.
In diesem Fall ist die Klasse von G um 1 höher als die maximale Klasse aller $G/D(g)$.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Siehe 1.2.9.
„$\Leftarrow$“: Sei $G/D(g)$ nilpotent für alle $g \in G$; zudem ist auf Grund der Zentralisatorschranke $n \in \mathbb{N}$ stets $G/D(g)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_n (vgl. 2.1.7).
Zu jedem $g \in G$ existiert nach 1.2.12 nun ein $c(g) \in \mathbb{N}$ derart, dass $G/D(g)$ von Klasse $c(g)$ ist. Sei $c := \max\{c(g)|g \in G\}$. Dann gilt $\mathcal{K}_{c+1}(G)D(g)/D(g) = \mathcal{K}_{c+1}(G/D(g)) = \{D(g)\}$ für alle $g \in G$, also ist stets $\mathcal{K}_{c+1}(G) \preceq D(g)$, woraus $\mathcal{K}_{c+1}(G) \preceq Z(G)$ und $\mathcal{K}_{c+2}(G) = \{e\}$ resultiert. Da es wiederum ein $g \in G$ mit $\mathcal{K}_c(G)D(g)/D(g) \succ \{D(g)\}$ gibt, ist $\mathcal{K}_c(G) \not\preceq Z(G)$, ergo $\mathcal{K}_{c+1}(G) \neq \{e\}$, so dass 1.2.12 die Behauptung ergibt. #

2.4 Die p-Sylowgruppen der symmetrischen Gruppe S_{p^2}

In den verbleibenden Kapiteln sollen Gruppen G mit Zentralisatorschranke p^2 zu einer beliebigen Primzahl p untersucht werden, wobei der Fall $p = 2$ gelegentlich extern behandelt wird. In völliger Analogie zum bisherigen Vorgehen wählen wir wieder ein $t \in G$ aus, dessen Zentralisator den Index p^2 hat, und bilden erneut den Durchschnitt aller konjugierten Zentralisatoren $D(t)$; die damit gebildete Faktorgruppe ist nach 2.1.7 isomorph zu einer transitiven Untergruppe von S_{p^2}, also nach 2.1.8 von der Mächtigkeit $p^2 \cdot m$, wobei m ein Teiler von $(p^2 - 1)!$ ist. Stets zu berücksichtigen ist dabei 2.1.5, welches besagt, dass jede Faktorgruppe von G eine Zentralisatorschranke von höchstens p^2 haben kann. Somit wird diese Zentralisatorschranke insbesondere für die Faktorgruppe $G/D(t)$ und ihre p-Sylowgruppen gefordert, die zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} isomorph sein müssen.
Von Interesse für uns sind deshalb die p-Sylowgruppen von S_{p^2}, und bevor wir mit deren Untersuchung beginnen, ist es sinnvoll, einige Besonderheiten von p-Gruppen allgemein aufzulisten:

2.4.1 Satz Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und G eine p-Gruppe der Ordnung p^n. Dann gelten:
(i) $|Z(G)| > 1$.
(ii) Jede echte Untergruppe U von G ist ungleich ihrem Normalisator: $U \prec G \Rightarrow U \prec N_G(U)$.
(iii) Jede maximale Untergruppe M von G hat Ordnung p^{n-1} und ist Normalteiler von G.
(iv) Jeder Normalteiler der Ordnung p liegt im Zentrum von G.
(v) G ist nilpotent.
(vi) Ist G nicht abelsch, so gilt: p^2 teilt $|G/Z(G)|$ und $|G/G'|$.
(vii) Ist G/G' zyklisch, so ist G zyklisch.
(viii) Sei $p > 2$. Besitzt G nur eine Untergruppe der Ordnung p, so ist G zyklisch.
(ix) Besitzt G für ein $1 < m < n$ nur eine Untergruppe der Ordnung p^m, so ist G zyklisch.

Beweis: (i) Siehe Hall [1], Seite 47f.
(ii) Siehe Hall [1], Seite 44.
(iii) Siehe Hall [1], Seite 48.
(iv) Siehe Hall [1], Seite 49.
(v) Folgt aus (iii) und 1.2.10.
(vi), (vii) Siehe Huppert [4], Seite 300f.
(viii), (ix) Siehe Huppert [4], Seite 311f. #

In Huppert [4], Seite 378ff, sind einige Eigenschaften der p-Sylowgruppen einer symmetrischen Gruppe S_{p^n} angegeben, und wir wollen diese als Einstieg in einem Satz zusammenfassen:

2.4.2 Satz Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und P_n eine p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe S_{p^n}, dann gelten:
(i) P_n hat den Exponenten p^n und ist für $n > 1$ nicht regulär[6].
(ii) Die minimale Erzeugendenzahl von P_n ist n.
P_n lässt sich mit Elementen der Ordnung p erzeugen.
(iii) P_n ist auflösbar von Stufe n.
(iv) P_n ist nilpotent von Klasse p^{n-1}.

[6] Zur Definition vgl. 2.5.6.

Auch wollen wir gleich zu Beginn einige Aussagen über die symmetrische Gruppe, wie sie in Kapitel 1.5 gezeigt wurden, präzisieren. Die Beweise funktionieren analog zu denen von 1.5.6, 1.5.7, 1.5.11 und 1.5.12.

2.4.3 Lemma Sei p eine Primzahl, sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt in der symmetrischen Gruppe S_{p^n}:
(i) Elemente der Ordnung p^n sind Zykel der Länge p^n.
(ii) Es gibt $(p^n-1)!$ verschiedene Elemente der Ordnung p^n.
(iii) Sei $\pi \in S_{p^n}$ mit $ord(\pi) = p^n$. Dann ist $C_{S_{p^n}}(\pi) = \langle \pi \rangle$.
(iv) Sei $(i_1, ..., i_{p^n})$ ein Element der Ordnung p^n, sei $m \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m,p) = 1$. Dann ist $(i_1, ..., i_{p^n})^m = (i_1, i_{1+m}, i_{1+2m}, ..., i_{1+(p^n-1)m})$, wobei die Indizes modulo p^n zu nehmen sind.

Betrachten wir nun die Zykel $\alpha_1 := (1, p+1, ..., (p-1)p+1)$ und $\beta := (1, ..., p^2)$ aus S_{p^2}, dann ist $\beta\alpha_1\beta^{-1} = (1, ..., p^2)(1, p+1, ..., (p-1)p+1)(p^2, ..., 1) = (2, p+2, 2p+2, ..., (p-1)p+2) =: \alpha_2$, $\beta\alpha_2\beta^{-1} = (3, p+3, 2p+3, ..., (p-1)p+3) =: \alpha_3$, oder allgemein für $0 \leq k \leq p-1$ schließlich $\beta^k\alpha_1\beta^{-k} = \alpha_{1+k}$ mit $\alpha_j := (j, p+j, ..., (p-1)p+j)$ für $1 \leq j \leq p$. Da $\beta\alpha_p\beta^{-1} = \alpha_1$ gilt, kann man sogar allgemeiner formulieren:

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\beta^n\alpha_j\beta^{-n} = \alpha_{j+n}$, wobei die Indizes modulo p zu nehmen sind.

Zu beachten ist dabei, dass diese α_j elementfremde Zykel und somit miteinander vertauschbar sind; das Erzeugnis $\langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$ ist somit eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung p^p. Weil die p-Gruppen in S_{p^2} höchstens von Mächtigkeit p^{p+1} sind, ist das Erzeugnis

$$\langle \alpha_1, ..., \alpha_p, \beta \rangle = \langle \alpha_1, \beta \rangle \text{ eine } p\text{-Sylowgruppe von } S_{p^2} \text{ der Ordnung } p^{p+1}.$$

Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass die Abbildung f mit $f(k) = i_k$ eine Bijektion zwischen $\{1, ..., p^2\}$ und $\{i_1, ..., i_{p^2}\} \subseteq \{1, ..., p^2\}$ ist, können wir folgenden Satz formulieren:

2.4.4 Satz Sei p eine Primzahl, sei S_{p^2} die symmetrische Gruppe mit p^2 Elementen $\{i_1, ..., i_{p^2}\}$. Für $1 \leq j \leq p$ sei $\alpha_j := (i_j, i_{p+j}, i_{2p+j}, ..., i_{(p-1)p+j})$, des Weiteren $\beta := (i_1, ..., i_{p^2})$. Dann gilt:
(i) $P := \langle \alpha_1, \beta \rangle$ ist eine p-Sylowgruppe von S_{p^2} der Ordnung p^{p+1}.
(ii) Für $n \in \mathbb{Z}$ und $1 \leq j \leq p$ ist $\beta^n\alpha_j\beta^{-n} = \alpha_{j+n}$, wobei die Indizes modulo p zu nehmen sind.
(iii) $\Omega := \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$ ist ein elementarabelscher Normalteiler der Ordnung p^p in P.
(iv) Es ist $\beta^p = \alpha_1 \cdots \alpha_p$ und somit $\Omega \cap \langle \beta \rangle = \langle \beta^p \rangle \trianglelefteq P$.
(v) Sei $\pi \in P$ beliebig, dann lässt sich π eindeutig darstellen in der Form $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p}\beta^k$ mit $k, k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$.

Beweis: Die Aussagen (i) bis (iii) wurden bereits gezeigt (die Normalteilereigenschaft bei (iii) resultiert aus 2.4.1(iii)), (iv) folgt durch konkretes Berechnen von β^p.
(v) Aus (ii) folgt, dass $\beta^n\alpha_j = \alpha_{j+n}\beta^n$ ist, außerdem sind die α_j vertauschbar, so dass mit (iv) die Behauptung folgt. #

Aus (iii) folgt zudem, dass es für alle $0 \leq k \leq p$ eine elementarabelsche Untergruppe der Ordnung p^k in P gibt.
Versuchen wir die Struktur von P noch etwas genauer zu erkunden. Sei $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p}\beta^k$ beliebig in P gewählt, dann berechnet sich (für $k \geq 1$) π^2 zu $\pi^2 = (\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p}\beta^k)(\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p}\beta^k) = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \underbrace{\beta^k\alpha_1^{k_1}\beta^{-k}}_{=\alpha_{1+k}^{k_1}}\beta^k \cdots \beta^{-k}\underbrace{\beta^k\alpha_p^{k_p}\beta^{-k}}_{=\alpha_{p+k}^{k_p}}\beta^{2k} = (\alpha_1\alpha_{1+k})^{k_1} \cdots (\alpha_p\alpha_{p+k})^{k_p}\beta^{2k}$,

analog π^3 zu $\pi^3 = (\alpha_1\alpha_{1+k}\alpha_{1+2k})^{k_1}\cdots(\alpha_p\alpha_{p+k}\alpha_{p+2k})^{k_p}\beta^{3k}$ oder allgemein für $2 \leq j \leq p$ schließlich $\pi^j = (\alpha_1\alpha_{1+k}\cdots\alpha_{1+(j-1)k})^{k_1}\cdots(\alpha_p\alpha_{p+k}\cdots\alpha_{p+(j-1)k})^{k_p}\beta^{jk}$.
Wenn man nun für $j = p$ berücksichtigt, dass einerseits $\beta^{pk} = (\beta^p)^k = (\alpha_1\cdots\alpha_p)^k$ ist, und andererseits die Indizes $i,\ i+k,\ ...,\ i+(p-1)k$ (modulo p genommen) für $k \geq 1$ gerade alle Werte von 1 bis p durchlaufen, ergibt sich π^p zu $\pi^p = (\alpha_1\cdots\alpha_p)^{k_1+\ldots+k_p+k}$ für $1 \leq k \leq p-1$, bzw. $\pi^p = e$ für $k = 0$, da π dann offensichtlich ein Element der Ordnung p ist. Fassen wir dies in einem Hilfssatz zusammen:

2.4.5 Lemma Sei p eine Primzahl, sei S_{p^2} die symmetrische Gruppe mit p^2 Elementen $\{i_1, ..., i_{p^2}\}$. Für $1 \leq r \leq p$ sei $\alpha_r := (i_r, i_{p+r}, i_{2p+r}, ..., i_{(p-1)p+r})$, des Weiteren $\beta := (i_1, ..., i_{p^2})$. Sei $P := \langle\alpha_1, \beta\rangle$ eine p-Sylowgruppe von S_{p^2}.
Sei $\pi = \alpha_1^{k_1}\cdots\alpha_p^{k_p}\beta^k$ mit $k, k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$ ein beliebiges Element in P, dann gilt:
(i) Für $k \geq 1$ ist $\pi^j = (\alpha_1\alpha_{1+k}\cdots\alpha_{1+(j-1)k})^{k_1}\cdots(\alpha_p\alpha_{p+k}\cdots\alpha_{p+(j-1)k})^{k_p}\beta^{jk}$
mit $2 \leq j \leq p-1$ und $\pi^p = (\alpha_1\cdots\alpha_p)^{k_1+\ldots+k_p+k}$.
(ii) Für $k = 0$ ist $\pi^j = \alpha_1^{jk_1}\cdots\alpha_p^{jk_p}$ mit $2 \leq j \leq p-1$ und $\pi^p = e$.

2.4.6 Korollar Sei p eine Primzahl, S_{p^2} die symmetrische Gruppe mit p^2 Elementen und P eine p-Sylowgruppe in S_{p^2}. Dann umfasst P genau $2p^p - p^{p-1} - 1$ verschiedene Elemente der Ordnung p und $p^{p-1}(p-1)^2$ verschiedene Elemente der Ordnung p^2.

Beweis: Da alle p-Sylowgruppen von S_{p^2} laut 1.4.3 zueinander konjugiert sind, genügt es, eine p-Sylowgruppe von S_{p^2} zu betrachten; sei P also gegeben wie in Satz 2.4.5. Im Fall $k = 0$ ist π entweder der Ordnung 1 oder p, das liefert $p^p - 1$ unterschiedliche Elemente der Ordnung p. Sei nun $k \geq 1$, dann ist $\pi^p = (\alpha_1\cdots\alpha_p)^{k_1+\ldots+k_p+k}$, und dies ist gleich e genau dann, wenn $k_1 + ... + k_p + k \equiv 0 \pmod p$ ist; für k verbleiben $p-1$ Möglichkeiten, für k_2 bis k_p jeweils p, k_1 ist durch die Bedingung $k_1 + ... + k_p + k \equiv 0 \pmod p$ festgelegt. Somit liefert einfaches Abzählen, dass es im Fall $k \geq 1$ gerade $p^{p-1}(p-1)$ Elemente der Ordnung p gibt, also insgesamt $p^{p-1}(p-1) + p^p - 1 = 2p^p - p^{p-1} - 1$ Elemente der Ordnung p und $p^{p+1} - (2p^p - p^{p-1}) = p^{p-1}(p^2 - 2p + 1) = p^{p-1}(p-1)^2$ Elemente der Ordnung p^2. #

2.4.7 Korollar Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5, dann gilt:
(i) Es gibt $p^{p-2}(p-1)$ verschiedene zyklische Gruppen der Ordnung p^2 in P.
(ii) Der Schnitt zweier solcher Gruppen ist gleich dem Schnitt aller zyklischen Gruppen der Ordnung p^2 in P, nämlich gleich $Z(G) = \langle\beta^p\rangle$.

Beweis: (i) Jede zyklische Gruppe der Ordnung p^2 enthält $p^2 - p$ Elemente der Ordnung p^2, die allesamt Erzeugende für die zyklische Gruppe sind. Der Schnitt zweier unterschiedlicher Gruppen kann also keine Elemente der Ordnung p^2 enthalten; somit gibt es $\frac{p^{p-1}(p-1)^2}{p(p-1)} = p^{p-2}(p-1)$ verschiedene zyklische Gruppen dieser Ordnung.
(ii) Neben dem Neutralen können zwei zyklische Gruppen $\langle\gamma\rangle$ und $\langle\delta\rangle$ der Ordnung p^2 allenfalls in den Elementen der Ordnung p übereinstimmen, und das sind gerade jene Potenzen von γ bzw. δ, bei denen der Exponent durch p teilbar ist. Nach 2.4.5(i) sind dies gerade die Elemente aus $\langle\beta^p\rangle$.
Die Zentralisatoren von Elementen der Ordnung p^2 sind nach 2.4.3 jedoch ihr eigenes Erzeugnis, deshalb folgt $Z(G) \preceq \langle\beta^p\rangle$; andererseits ist nach 2.4.1(i) das Zentrum nicht trivial, womit die Behauptung folgt. #

Damit verfügen wir nun schon über eine beachtliche Menge an Informationen über eine p-Sylowgruppe P aus S_{p^2}. Nach 2.1.1 ist der Index des Zentralisators eines Elementes gleich der Anzahl der Konjugierten des Elementes; damit hat ein Element der Ordnung p^2 gerade p^{p-1} Konjugierte in P, also gemäß 2.4.6 weniger, als es Elemente von Ordnung p^2 in P gibt; oder anders formuliert: In P sind nicht alle Elemente der Ordnung p^2 miteinander konjugiert! 1.1.11 wiederum legt dar, dass die Zahl der konjugierten zyklischen Untergruppen gleich dem Index ihres Normalisators in P ist, also in jedem Fall eine Primpotenz. Das ergibt mit 2.4.7(i), dass dieser Index ein Teiler von p^{p-2} ist. Betrachten wir nun die Kommutatorgruppe von P.

2.4.8 Lemma Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5. Sei zudem $\phi := \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_p^{j_p} \beta^j$ mit Hochzahlen $j, j_1, ..., j_p \in \{0, ..., p-1\}$ ein beliebiges Elemente in P, dann gilt:

(i) $[\pi, \phi] = \alpha_1^{k_1 - j_1 + j_{p-k+1} - k_{p-j+1}} \alpha_2^{k_2 - j_2 + j_{p-k+2} - k_{p-j+2}} \cdots \alpha_p^{k_p - j_p + j_{p-k} - k_{p-j}}$ für $k, j \geq 1$.

(ii) $[\pi, \phi] = \alpha_1^{-j_1 + j_{p-k+1}} \cdots \alpha_p^{-j_p + j_{p-k}}$ für $k \geq 1$, $j = 0$.

(iii) $P' \preceq \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$ hat Mächtigkeit p^{p-1} und ist elementarabelsch.
(iv) P ist auflösbar von Stufe 2 und nilpotent von Klasse p.
(v) Es ist $|P/\mathcal{K}_2(P)| = p^2$ und $|\mathcal{K}_i(P)/\mathcal{K}_{i+1}(P)| = p$ für $2 \leq i \leq p$.
(vi) Für $2 \leq i \leq p+1$ ist $\mathcal{K}_i(P)$ der einzige Normalteiler vom Index p^i in P.
(vii) Für $0 \leq i \leq p$ ist $\mathcal{Z}_i(P) = \mathcal{K}_{p+1-i}(P)$.
(viii) $|\mathcal{K}_r(P)| = p^{p+1-r}$ für $2 \leq r \leq p+1$.

Beweis: (i) $[\pi, \phi] = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta^k \ \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_p^{j_p} \ \underline{\beta^{-k}\beta^j} \ \alpha_p^{-k_p} \cdots \alpha_1^{-k_1} \ \beta^{-j} \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} =$
$\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \cdot \alpha_{1+k}^{j_1} \cdots \alpha_{p+k}^{j_p} \cdot \alpha_{p+j}^{-k_p} \cdots \alpha_{1+j}^{-k_1} \cdot \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} =$
$\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \cdot \alpha_1^{j_{p-k+1}} \cdots \alpha_p^{j_{p-k}} \cdot \alpha_p^{-k_{p-j}} \cdots \alpha_1^{-k_{p-j+1}} \cdot \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} =$
$\alpha_1^{k_1 - j_1 + j_{p-k+1} - k_{p-j+1}} \cdots \alpha_p^{k_p - j_p + j_{p-k} - k_{p-j}}$.
(ii) $[\pi, \phi] = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \underline{\beta^k \ \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_p^{j_p} \ \beta^{-k}} \ \alpha_p^{-k_p} \cdots \alpha_1^{-k_1} \ \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} =$
$\alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \cdot \alpha_{1+k}^{j_1} \cdots \alpha_{p+k}^{j_p} \cdot \alpha_p^{-k_p} \cdots \alpha_1^{-k_1} \ \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} =$
$\alpha_1^{j_{p-k+1}} \cdots \alpha_p^{j_{p-k}} \ \alpha_p^{-j_p} \cdots \alpha_1^{-j_1} \quad = \quad \alpha_1^{-j_1 + j_{p-k+1}} \cdots \alpha_p^{-j_p + j_{p-k}}$.
(iii) Laut 2.4.1(vi) ist $|P'| \leq p^{p-1}$. Sei nun $\phi = \alpha_1 \cdots \alpha_p \beta$, π wie bisher, dann ist der Kommutator $[\pi, \phi] = \alpha_1^{k_1 - k_p} \alpha_2^{k_2 - k_1} \cdots \alpha_p^{k_p - k_{p-1}}$. Somit sind beispielsweise die Exponenten von α_1 bis α_{p-1} frei wählbar, der von α_p dann festgelegt; also ist $|P'| \geq p^{p-1}$.
(iv) Vgl. 2.4.2.
(v) Folgt aus (iii) und (iv) und der sich auf diese Weise ergebenden absteigenden Zentralreihe $P = \mathcal{K}_1(P) \succ \mathcal{K}_2(P) \succ ... \succ \mathcal{K}_{p+1}(P) = \{e\}$.
(vi) Sei $N \trianglelefteq P$ mit $|P/N| = p^i$. Ist P/N nicht abelsch, so ist $|(P/N) \ / \ \mathcal{K}_2(P/N)| \geq p^2$ nach 2.4.1(vi), also die Klasse von P/N maximal $i-1$ ist. Aus diesem Grund verschwindet $\mathcal{K}_i(P/N) = \mathcal{K}_i(P)N/N$ (man beachte, dass $[aN, bN] = [a, b]N$ gilt!), womit $\mathcal{K}_i(P) \preceq N$ folgt. Wegen (v) ist $|P/\mathcal{K}_i(P)| = p^i = |P/N|$, auf Grund dessen sich die Behauptung ergibt.
(vii) Man erhält die aufsteigende Zentralreihe $\{e\} = \mathcal{Z}_0(P) \prec \mathcal{Z}_1(P) \prec ... \prec \mathcal{Z}_p(P) = P$ (man vgl. (iv)), für die offensichtlich gelten muss: $|P/\mathcal{Z}_i(P)| \leq p^{p+1-i}$. Da $P/\mathcal{Z}_{p-2}(P)$ noch nicht abelsch sein darf, gilt sogar $|P/\mathcal{Z}_{p-2}(P)| \geq p^3 = p^{p+1-(p-2)}$, also gerade Gleichheit, womit das Zentrum von $P/\mathcal{Z}_{p-2}(P)$ nach 2.4.1(vi) von Ordnung p ist. Damit ist $|P/\mathcal{Z}_i(P)| = p^{p+1-i}$ für alle $0 \leq i \leq p-1$, was mit (vi) die Behauptung liefert.
(viii) ist eine Konsequenz aus (iv) und (v). #

Der Beweis von (v) bis (vii) erfolgte in Anlehnung an Huppert [4], Seite 361. Untersuchen wir nun die Struktur der Kettenglieder der absteigenden Zentralreihe von P weiter:

2.4.9 Lemma Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5, dann gilt:
Für $2 \leq r \leq p$ lässt sich jedes $\phi \in \mathcal{K}_r(P)$ darstellen in der Form
$\phi = \alpha_1^{f_1} \cdots \alpha_{r-1}^{f_{r-1}} \alpha_r^{j_r} \cdots \alpha_p^{j_p}$ mit $j_r, ..., j_p \in \{0, ..., p-1\}$ und $f_i = f_i(j_r, ..., j_p) \in \{0, ..., p-1\}$ einer Funktion der Potenzen $j_r, ..., j_p$; d.h. mit $j_r, ..., j_p$ sind auch die übrigen Potenzen der α_i festgelegt $(1 \leq i \leq r-1)$.

Beweis: Der Beweis wird per Induktion geführt. Der Induktionsanfang ist der Fall $r = 2$, für den laut 2.4.8(i), (ii) gilt, dass die Summe der Potenzen verschwinden muss.
Sei die Behauptung also für alle $\mathcal{K}_s(P)$ mit $s \leq r$ gezeigt, betrachte den Fall $s = r + 1$:
Sei $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta$ mit $k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$ und $\phi = \alpha_1^{f_1} \cdots \alpha_{r-1}^{f_{r-1}} \alpha_r^{j_r} \cdots \alpha_p^{j_p} \in \mathcal{K}_r(P)$ wie oben. Dann ist $[\pi, \phi] \in \mathcal{K}_{r+1}(P)$ und berechnet sich gemäß 2.4.8(ii) zu
$[\pi, \phi] = \alpha_1^{j_p - f_1} \alpha_2^{f_1 - f_2} \cdots \alpha_{r-1}^{f_{r-2} - f_{r-1}} \alpha_r^{f_{r-1} - j_r} \alpha_{r+1}^{j_r - j_{r+1}} \cdots \alpha_p^{j_{p-1} - j_p}$,
womit die Exponenten von α_{r+1} bis α_p, dies sind $p - r$ Stück, frei wählbar sind, deshalb $|\mathcal{K}_{r+1}(P)| \geq |[\pi, \mathcal{K}_r(P)]| \geq p^{p-r} = |\mathcal{K}_{r+1}(P)|$ ist (vgl. 2.4.8(viii)). Die Potenzen von α_1 bis α_r sind somit festgelegt. #

2.4.10 Lemma Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5, sei U zudem eine beliebige Untergruppe von P, die ein Element $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta^k$ mit $k, k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$ und einem $k \geq 1$ besitze.
Dann enthält U auch zu jedem weiteren $1 \leq j \leq p-1$ ein Element der Form $\phi = \alpha_1^{j_1} \cdots \alpha_p^{j_p} \beta^j$ mit $j_1, ..., j_p \in \{0, ..., p-1\}$. Es sind also alle möglichen Potenzen von β in U vertreten.

Beweis: Für $2 \leq r \leq p-1$ ist $\pi^r \in U$, und als Potenz von β ergibt sich rk nach 2.4.5(i). Es ist $rk \equiv k \pmod{p}$ genau dann, wenn $(r-1)k \equiv 0 \pmod{p}$, also $r - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Dies wäre aber nur für $r \equiv 1 \pmod{p}$ möglich, womit $rk \not\equiv k \pmod{p}$ folgt und die Potenz rk für $1 \leq r \leq p-1$ alle Werte von 1 bis $p-1$ durchläuft. Damit ist alles gezeigt. #

Die Konsequenz dieses Lemmas ist, dass man in jeder Untergruppe U von P, die wenigstens ein Element aus $P \setminus \Omega$ mit $\Omega := \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$ enthält, auf jeden Fall auch ein Element der Form $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta$ mit $k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$ findet. Diese Eigenschaft werden wir im Folgenden des Öfteren benötigen und sie nun wie folgt ergänzen:

2.4.11 Lemma Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5.
Sei $\Omega := \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$ und $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta \in P \setminus \Omega$ mit $k_1, ..., k_p \in \{0, ..., p-1\}$.
Dann ist $\qquad [\pi, \mathcal{K}_r(P)] = \mathcal{K}_{r+1}(P) \qquad$ für $2 \leq r \leq p$.

Beweis: Sicher gilt $[\pi, \mathcal{K}_r(P)] \subseteq \mathcal{K}_{r+1}(P)$. Nach 2.4.9 lässt sich jedes $\phi \in \mathcal{K}_r(P)$ darstellen in der Form $\phi = \alpha_1^{f_1} \cdots \alpha_{r-1}^{f_{r-1}} \alpha_r^{j_r} \cdots \alpha_p^{j_p}$ mit $j_r, ..., j_p \in \{0, ..., p-1\}$ und den Funktionen $f_i = f_i(j_r, ..., j_p) \in \{0, ..., p-1\}$ für $1 \leq i \leq r-1$. Mit 2.4.8(ii) zeigt man in völliger Analogie zum Beweis von 2.4.9 die Behauptung. #

Die Struktur einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} ist somit weitestgehend aufgedeckt. Für den Fall $p = 2$ ist die 2-Sylowgruppe isomorph zu D_4, welches in 2.3.58 diskutiert wurde und u.a. die Ergebnisse (iv), (v) und (vii) bestätigte; ebensolche Übereinstimmung ergibt auch der Fall $p = 3$, der in 2.5.33 diskutiert werden wird.

Betrachten wir den Fall, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler in G ist, aber vom Index p^2. Dann ist die Faktorgruppe einerseits nicht abelsch, was in 2.1.12 gezeigt worden ist, andererseits gilt für ihre Mächtigkeit, dass $|G/D(t)| > p^2$ ist. Sei U jene Untergruppe von S_{p^2}, zu der $G/D(t)$ isomorph ist. Für den Fall, dass U ein Element der Ordnung p^2 enthält, lässt sich gleich zu Beginn eine sehr starke Einschränkung finden, denn gemäß 2.4.3 ist der Zentralisator eines solchen Elementes gerade sein eigenes Erzeugnis und somit vom Index $\frac{|U|}{p^2}$, weshalb sich aus der Zentralisatorschranke p^2 die Forderung $|U| \leq p^4$ ableiten lässt. Doch was ist im Fall, wenn der Exponent von U_p, einer p-Sylowgruppe von U, gerade gleich p ist? Sicher ist nur, dass dann $|U_p| \leq p^p$ gilt, aber diese Aussage stellt uns noch nicht zufrieden. Untersuchen wir deshalb, welche nichtabelschen Untergruppen vom Exponenten p sich in P finden lassen.

Beginnen wir mit den maximalen Untergruppen vom Exponenten p; da diese Normalteiler sind mit abelscher Faktorgruppe, ist P' in ihnen enthalten, und da P' maximal in ihnen liegt (vgl. 2.4.8(iii)), genügt ein weiteres Element außerhalb von P', um die maximale Untergruppe erzeugen zu können. Betrachtet man nochmals den Beweis von 2.4.6, so gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, Elemente der Ordnung p außerhalb von P' aufzufinden: Einerseits in $\Omega := \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$, wodurch man gerade diese (elementarabelsche) Untergruppe erzeugt, oder andererseits in $P \setminus \Omega$, wobei ein solches Element π dann die Form $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta^k$ mit $k_1 + ... + k_p + k \equiv 0 \pmod p$ und $k \geq 1$ hat.
Betrachtet man $K_p := \langle \pi, P' \rangle$, so zeigt man analog 2.3.1, dass Elemente $x \in K_p$ die Form $x = \pi^j g$ mit $0 \leq j \leq p-1$ und $g \in P'$ haben, also K_p tatsächlich von Mächtigkeit p^p ist, und da $g\pi = \pi g[g^{-1}, \pi^{-1}] =: \pi \tilde{g}$ mit $\tilde{g} \in P'$ gilt, folgt unmittelbar, dass K_p vom Exponenten p ist. Des Weiteren kann K_p keine Elemente aus $\Omega \setminus P'$ enthalten, da sonst (P' maximal in Ω!) ganz Ω mit K_p übereinstimmen müsste, was gerade nicht der Fall ist. Wir haben somit zwei verschiedene maximale Untergruppen vom Exponenten p gefunden, deren Schnitt gerade gleich P' ist, und gemeinsam umfassen diese beiden $(p^{p-1} - 1) + 2 \cdot (p^p - p^{p-1}) = 2p^p - p^{p-1} - 1$ verschiedene Elemente der Ordnung p, und da es nach 2.4.6 keine zusätzlichen mehr in P gibt (und P' maximal in jeder maximalen Untergruppe liegt!!!), sind dies die einzigen maximalen Untergruppen vom Exponenten p, und für jede andere maximale Untergruppe gilt, dass sie außer den Elementen aus P' keine weiteren Elemente von Ordnung p enthält. Halten wir diese Ergebnisse fest:

2.4.12 Satz Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.5.
Sei $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta^k$ mit $k_1 + ... + k_p + k \equiv 0 \pmod p$ und $k \geq 1$ ein beliebiges Element der Ordnung p in $P \setminus \Omega$, dann gilt:
(i) Es gibt genau zwei maximale Untergruppen vom Exponenten p in P, es sind dies das elementarabelsche Ω und die Untergruppe $K_p := \langle \pi, P' \rangle$.
(ii) $\Omega \cap K_p = P'$.
(iii) Es gibt keine andere maximale Untergruppe in P, die neben den Elementen aus P' ein weiteres Element der Ordnung p enthalten kann.

2.4.13 Satz Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.12 und sei $K_p := \langle \pi, P' \rangle$. Es gilt:
(i) $K_p' = \mathcal{K}_3(P) \trianglelefteq P$, also von Ordnung p^{p-2}.
(ii) K_p hat die Zentralisatorschranke p^{p-2}.
(iii) K_p ist auflösbar von Stufe 2 (für $p \neq 2$) und nilpotent von Klasse $p-1$.

Beweis: Sei $\gamma = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta$ mit $k_1 + ... + k_p + 1 \equiv 0 \pmod p$ ein Element der Ordnung p in $(P \setminus \Omega) \cap K_p$. Wegen $P' = \mathcal{K}_2(P)$ ist dann $|K_p'| \geq |[\gamma, P']| = |\mathcal{K}_3(P)| = p^{p-2}$ gemäß 2.4.11, wegen 2.4.1(vi) gleichzeitig aber auch $|K_p'| \leq p^{p-2}$, was Gleichheit zur Folge hat. Daraus folgt Aussage (i). 2.4.11 mehrfach angewandt liefert (iii).
Verbleibt noch (ii), doch dieses folgt ebenfalls unmittelbar aus dem eben Gezeigten und 2.1.1, denn es ist $p^{p-2} = |K_p'| \geq |[\gamma, K_p]| \geq |[\gamma, P']| = p^{p-2}$. #

Den weiteren Weg weist uns eine verschärfte Formulierung des Sylowsatzes 1.4.1, wie sie in Hall [1], Seite 44f, zu finden ist:

2.4.14 Satz Sei die Gruppe G von Ordnung $p^r m$ mit $p \not| m$ und p Primzahl. Dann enthält G für alle $1 \leq s \leq r$ eine Untergruppe von Ordnung p^s, und jede Untergruppe der Ordnung p^i, mit $1 \leq i \leq r-1$, ist in mindestens einer Untergruppe der Ordnung p^{i+1} enthalten.

Suchen wir nun also eine Untergruppe vom Exponenten p in P, so wird diese in Ω oder K_p gelegen sein. Im ersten Fall ist diese Untergruppe damit elementarabelsch, weshalb unser Betrachtungsschwerpunkt im Folgenden auf Untergruppen von K_p liegen wird, denn Untergruppen vom Exponenten p mit nichttrivialer Zentralisatorschranke müssen in K_p enthalten sein. Allerdings weist K_p selbst jedoch für $p \geq 5$ eine zu große Zentralisatorschranke auf.
Beginnen wir wieder mit der Suche nach einer maximalen Untergruppe in K_p, so wird diese analog eben die Kommutatorgruppe K_p' beinhalten, die auch wieder maximal sein wird, also maximale Untergruppen M in K_p die Form $M = \langle \pi, K_p' \rangle$ mit geeignetem $\pi \in K_p \setminus K_p'$ haben werden. Liegt dieses π in $\mathcal{K}_2(P) \setminus \mathcal{K}_3(P)$, so ist $M = \mathcal{K}_2(P)$, also elementarabelsch; uns interessieren deshalb speziell die $\pi \in K_p \setminus \mathcal{K}_2(P) = K_p \setminus K_{p+1}'$ mit $K_{p+1} := P$. Versuchen wir damit eine Kette zu bilden:

Sei $K_{p+1} := P$ und $K_p := \langle \pi, P' \rangle$ mit $\pi \in P \setminus \Omega$ und $ord(\pi) = p$ wie bisher.
Eine Gruppe heißt nun vom Typ K_r, $r < p$, wenn gilt:
Ist $K_{r+1} \setminus K_{r+2}' \neq \emptyset$, so ist $K_r := \langle \gamma, K_{r+1}' \rangle \preceq K_{r+1}$ mit einem $\gamma \in K_{r+1} \setminus K_{r+2}'$, ansonsten sei $K_r := K_{r+1}'$.

Offensichtlich gilt in einer solchen Kette, dass $K_r' \preceq K_{r+1}'$ ist. Außerdem ist $K_{p+1}' \prec K_p$ nach 2.4.13, was wir als Anfang eines Induktionsschlusses nutzen können, um damit allgemein $K_{r+1}' \prec K_r$ zu zeigen, denn ist die Behauptung für K_s mit $s \geq r$ gezeigt, so ist $K_r \setminus K_{r+1}' \neq \emptyset$, also $K_{r-1} = \langle \gamma, K_r' \rangle$ mit einem $\gamma \in K_r \setminus K_{r+1}'$, womit $\gamma \notin K_r' \preceq K_{r+1}'$ sein kann. Damit ist aber $\langle \gamma, K_r' \rangle = K_{r-1}$ echt größer als K_r' und die Behauptung bewiesen, wodurch sich die Definition obiger Kette vereinfacht zu:

$$K_{p+1} = P, \qquad K_p = \langle \pi, P' \rangle \qquad \text{mit } \pi \in P \setminus \Omega \text{ und } ord(\pi) = p \text{ und}$$
$$K_r := \langle \gamma, K_{r+1}' \rangle \qquad \text{mit einem } \gamma \in K_{r+1} \setminus K_{r+2}' \text{ für } r < p.$$

Per Induktion kann nun gezeigt werden, dass dieses γ stets aus $P \setminus \Omega$ ist, denn schon nach Definition von K_p ist $K_p \setminus K_{p+1}' \subseteq P \setminus \Omega$, was als Induktionsanfang für die Aussage $K_r \setminus K_{r+1}' \subseteq P \setminus \Omega$

für $r \leq p$ genommen werden kann. Sei diese Aussage nun also für $p \geq s \geq r$ gezeigt, dann betrachtet man nun $s = r - 1$:
Es ist $K_{r-1} = \langle \gamma, K_r' \rangle$ mit einem $\gamma \in K_r \setminus K_{r+1}' \subseteq P \setminus \Omega$, und da für beliebiges $a \in K_r'$ gilt, dass $a\gamma = \gamma a[a^{-1}, \gamma^{-1}]$ ist mit $a[a^{-1}, \gamma^{-1}] \in K_r'$, folgt, dass man Elemente aus K_{r-1} in der Form $\gamma^j a$ darstellen kann, mit einem $0 \leq j \leq p-1$ und $a \in K_r'$ (man beachte hierbei, dass K_p vom Exponenten p ist und somit γ von Ordnung p). Elemente aus $K_{r-1} \setminus K_r'$ sind nun von der Form $\gamma^j a$ mit einem $1 \leq j \leq p-1$ und $a \in K_r'$.
Angenommen, ein solches $\gamma^j a$ wäre in Ω gelegen, dann müsste auch $\gamma^j \in \Omega$ sein, da a darin enthalten ist; dies aber ist ein Widerspruch, weshalb alle $\gamma^j a$ mit einem $1 \leq j \leq p-1$ und $a \in K_r'$ in $P \setminus \Omega$ liegen. Damit ist aber auch $K_{r-1} \setminus K_r' \subseteq P \setminus \Omega$ und die Behauptung gezeigt.
Kommen wir nun zur entscheidenden Behauptung:

$$\text{Für alle } r \leq p \text{ ist } K_r = \langle \gamma, \mathcal{K}_{p-r+2}(P) \rangle \text{ und } K_r' = \mathcal{K}_{p-r+3}(P).$$

Für $r = p$ ist die Behauptung bereits in 2.4.13 gezeigt, weshalb wir nun annehmen, die Behauptung sei für $p \geq s \geq r$ gezeigt und den Fall $s = r - 1$ betrachten:
Es ist $K_{r-1} = \langle \gamma, K_r' \rangle$ mit einem $\gamma \in K_r \setminus K_{r+1}'$, und da K_r' nach Induktionsannahme gleich $\mathcal{K}_{p-r+3}(P) = \mathcal{K}_{p-(r-1)+2}(P)$ ist, folgt der erste Teil der Behauptung.
Wie eben gezeigt, haben Elemente aus K_{r-1} die Form $\gamma^j a$ mit einem $0 \leq j \leq p-1$ und $a \in K_r' = \mathcal{K}_{p-r+3}(P)$, wobei letzteres nach 2.4.8 von Mächtigkeit $p^{p+1-(p-r+3)} = p^{r-2}$ ist, womit $|K_{r-1}| = p \cdot p^{r-2} = p^{r-1}$ und $|K_{r-1}'| \leq p^{r-3}$ ist.
Da $\gamma \in P \setminus \Omega$ ist, liefert Aussage 2.4.10 die Existenz eines $\tilde{\gamma}$ der Form $\tilde{\gamma} = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta$ mit $k_1 + ... + k_p + 1 \equiv 0 \pmod p$. Nach Lemma 2.4.11 ist hiermit die Menge
$[\tilde{\gamma}, K_r'] = [\tilde{\gamma}, \mathcal{K}_{p-r+3}(P)] = \mathcal{K}_{p-r+4}(P)$, was zur Konsequenz hat, dass man die Ungleichung $p^{r-3} \geq |K_{r-1}'| \geq |[\tilde{\gamma}, K_r']| = |\mathcal{K}_{p-r+4}(P)| = p^{r-3}$ erhält, womit die Behauptung folgt.
Zugleich liefert dieses Ergebnis zusammen mit 2.1.1, dass K_{r-1} die Zentralisatorschranke p^{r-3} hat, und mehrfache Anwendung von 2.4.11 ergibt, dass K_{r-1} nilpotent der Klasse $r - 2$ ist. Halten wir diese Ergebnisse in einem Satz fest:

2.4.15 Satz Sei $p \geq 3$ eine Primzahl, sei S_{p^2} die symmetrische Gruppe mit p^2 Elementen $\{i_1, ..., i_{p^2}\}$. Für $1 \leq r \leq p$ sei $\alpha_r := (i_r, i_{p+r}, i_{2p+r}, ..., i_{(p-1)p+r})$, des Weiteren $\beta := (i_1, ..., i_{p^2})$. Sei $P := \langle \alpha_1, \beta \rangle$ eine p-Sylowgruppe von S_{p^2} und $\Omega := \langle \alpha_1, ..., \alpha_p \rangle$. Es gilt:
(i) Für alle $1 \leq r \leq p$ gibt es einen elementarabelschen Normalteiler der Ordnung p^r in P.
(ii) Für $3 \leq r \leq p$ existieren jeweils zwei Arten von Untergruppen von Ordnung p^r und Exponentem p in P: Entweder ist die Untergruppe elementarabelsch oder sie kann erzeugt werden durch $K_r := \langle \pi, \mathcal{K}_{p-r+2}(P) \rangle$ mit einem $\pi \in P \setminus \Omega$ von Ordnung p.
(iii) Für $2 \leq r \leq p$ gilt: K_r hat die Zentralisatorschranke p^{r-2}, die Kommutatorgruppe $K_r' = \mathcal{K}_{p-r+3}(P)$ und ist nilpotent von Klasse $r - 1$.

Die Ergebnisse dieses Satzes sind in Abbildung 2.4 veranschaulicht. Man rechnet dabei leicht nach, dass jede solche Untergruppe vom Typ K_r genau p verschiedene Untergruppen vom Typ K_{r-1} enthält; insgesamt gibt es damit zu gegebenem r genau p^{p-r} verschiedene Untergruppen vom Typ K_r.

Im Falle eines Exponenten von p^2 ist uns schon bekannt, dass eine Zentralisatorschranke von höchstens p^2 nur zu realisieren ist, wenn die betrachtete Untergruppe von P höchstens von Ordnung p^4 ist. Allerdings können mit diesem Wissen allein noch keine Aussagen über die Struktur dieser Untergruppen getroffen werden. Deshalb soll im Folgenden die Struktur

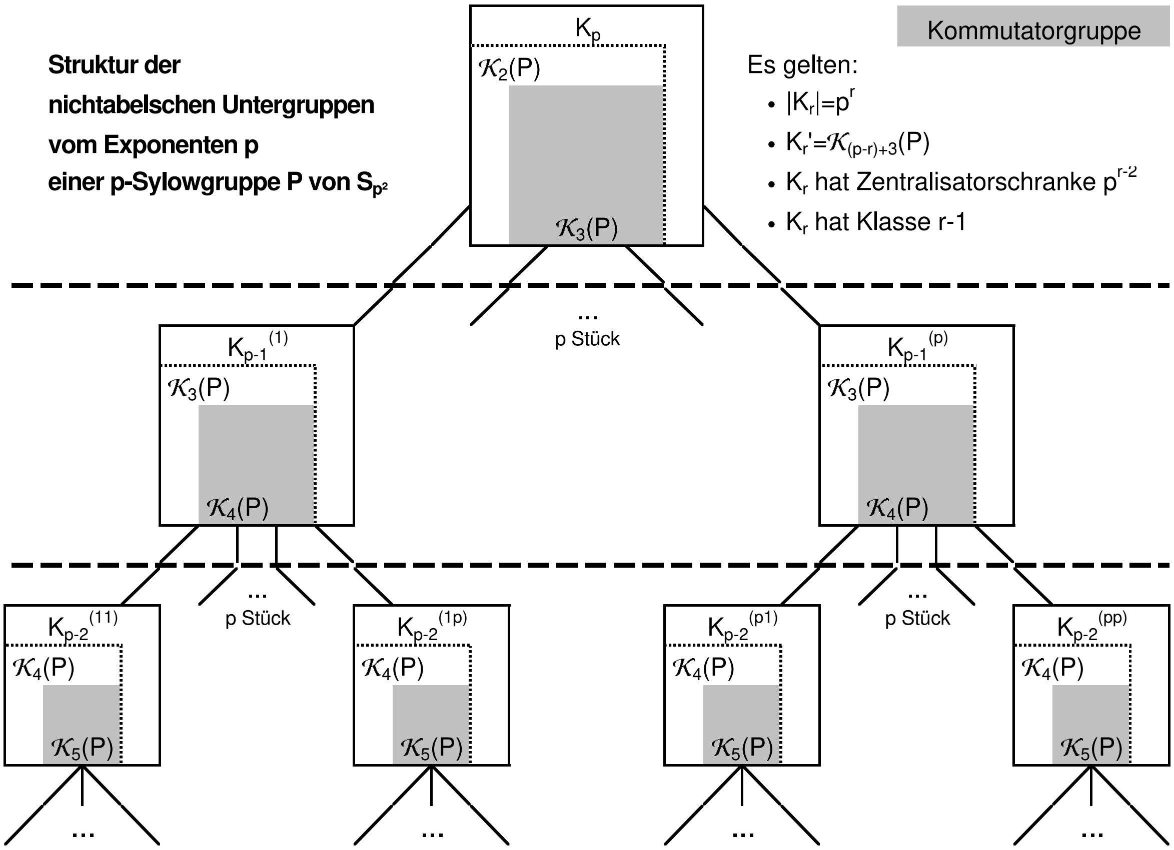

Abbildung 2.4: Strukturskizze der nichtabelschen Untergruppen vom Exponenten p in P

der Untergruppen vom Exponenten p^2 in P auf ähnliche Weise untersucht werden, wie dies im Fall eines Exponenten p geschah, und wie sich zeigen wird, können viele der dort gefundenen Ergebnisse übertragen werden.
Nach 2.4.7(ii) und 2.4.8(vii) ist $\langle \beta^p \rangle = Z(P) = \mathcal{Z}_1(P) = \mathcal{K}_p(P)$, also liegen für ein beliebiges $\pi \in P$ mit $ord(\pi) = p^2$ die Potenzen π^j mit $j \equiv 0 \pmod p$ in jedem $\mathcal{K}_r(P)$ mit $1 \leq r \leq p$.
Weiter ist für beliebiges $\phi \in \mathcal{K}_r(P)$ stets $\phi\pi = \pi\phi[\phi^{-1}, \pi^{-1}] =: \pi\tilde{\phi}$ mit $\tilde{\phi} \in \mathcal{K}_r(P)$, denn es ist $[\phi^{-1}, \pi^{-1}] \in \mathcal{K}_{r+1}(P) \preceq \mathcal{K}_r(P)$. Damit lässt sich für $2 \leq r \leq p$ ein beliebiges $x \in \langle \pi, \mathcal{K}_r(P) \rangle$ darstellen als $x = \pi^j \phi$ mit $0 \leq j \leq p-1$ und $\phi \in \mathcal{K}_r(P)$, und nach 2.4.8(viii) berechnet sich die Mächtigkeit $|\langle \pi, \mathcal{K}_r(P) \rangle| = p \cdot p^{p+1-r} = p^{p+2-r}$.
Betrachten wir nun die Ordnung eines beliebigen $\pi^j \phi$ mit $1 \leq j \leq p-1$, $\phi \in \mathcal{K}_r(P)$ und $ord(\pi) = p^2$:
Es ist π von der Form $\pi = \alpha_1^{k_1} \cdots \alpha_p^{k_p} \beta^k$ mit $k_1 + ... + k_p + k \not\equiv 0 \pmod p$ und $k \geq 1$, und nach 2.4.9 gilt für ϕ, dass $\phi = \alpha_1^{f_1} \cdots \alpha_{r-1}^{f_{r-1}} \alpha_r^{j_r} \cdots \alpha_p^{j_p}$ mit $j_r, ..., j_p \in \{0, ..., p-1\}$ und $f_i = f_i(j_r, ..., j_p) \in \{0, ..., p-1\}$ einer Funktion der Potenzen $j_r, ..., j_p$ für $1 \leq i \leq r-1$, wobei insbesondere $f_1 + ... + f_{r-1} + j_r + ... + j_p \equiv 0 \pmod p$ gilt.
Schreibt man nun $\pi\phi$ als $\pi\phi = \alpha_1^{l_1} \cdots \alpha_p^{l_p} \beta^k$ mit passenden $l_1, ..., l_p \in \{0, ..., p-1\}$, so ist $l_1 + ... + l_p + k = (f_1 + ... + f_{r-1} + j_r + ... + j_p) + (k_1 + ... + k_p + k) \not\equiv 0 \pmod p$, da der erste Summand identisch 0 modulo p ist, der zweite aber gerade nicht. Somit ist auch $\pi\phi$ stets von Ordnung p^2.

Untersuchen wir nun die Potenz π^j mit $2 \leq j \leq p-1$, so ergibt Aussage 2.4.5, dass $\pi^j = (\alpha_1\alpha_{1+k}\cdots\alpha_{1+(j-1)k})^{k_1}\cdots(\alpha_p\alpha_{p+k}\cdots\alpha_{p+(j-1)k})^{k_p}\beta^{jk}$ ist, und bringt man dies erneut auf die Form $\pi^j = \alpha_1^{l_1}\cdots\alpha_p^{l_p}\beta^{jk}$, so gilt für die Exponenten der einzelnen Faktoren, dass $l_1+\ldots+l_p+jk = jk_1+\ldots+jk_p+jk = j(k_1+\ldots+k_p+k) \not\equiv 0 \pmod p$ ist, da beide Faktoren nicht identisch 0 modulo p sind. Analog eben zeigt man, dass somit auch $\pi^j\phi$ für $2 \leq j \leq p-1$ stets von Ordnung p^2 ist, weshalb insgesamt gilt:

$$\text{Für alle } \pi^j\phi \in \langle\pi, \mathcal{K}_r(P)\rangle \text{ mit } 1 \leq j \leq p-1 \text{ und } 2 \leq r \leq p \text{ ist } ord(\pi^j\phi) = p^2.$$

Abgesehen von den Elementen aus $\mathcal{K}_r(P)$ sind also alle Elemente dieses Erzeugnisses von Ordnung p^2.

Dies legt nahe, die Untergruppen vom Exponenten p^2 in P ebenfalls über eine Kettenstruktur aus jeweils maximalen Untergruppen zu suchen. Man zeigt wieder, dass maximale Untergruppen M_p vom Exponenten p^2 und der Mächtigkeit p^p von der Form $M_p = \langle\pi, \mathcal{K}_2(P)\rangle$ sind (π wieder ein Element der Ordnung p^2, welches somit automatisch in $P \setminus \Omega$ gelegen ist), und dass sich zwei unterschiedliche Untergruppen des Typs M_p gerade in $\mathcal{K}_2(P)$ schneiden, denn in $M_p \setminus \mathcal{K}_2(P)$ liegen nur Elemente der Ordnung p^2. Von diesen gibt es in P genau $p^{p-1}(p-1)^2$ verschiedene (vgl. 2.4.6), in M_p selber nur $p^p - p^{p-1} = p^{p-1}(p-1)$ Stück, womit Division liefert, dass es $p-1$ verschiedene Untergruppen vom Typ M_p in P gibt.

Analog 2.4.13 zeigt man, dass $M_p' = \mathcal{K}_3(P)$ ist, M_p über die Zentralisatorschranke p^{p-2} verfügt und Klasse $p-1$ aufweist, während $M_{p+1} := P$ die Schranke p^{p-1} und die Klasse p hat. Somit ist es möglich, wieder eine Kette zu konstruieren über $M_r := \langle\gamma, M_{r+1}'\rangle$ und $\gamma \in M_{r+1} \setminus M_{r+2}'$ für $r < p$, und in gleicher Weise wie beim Exponenten p zeigt man, dass gilt:

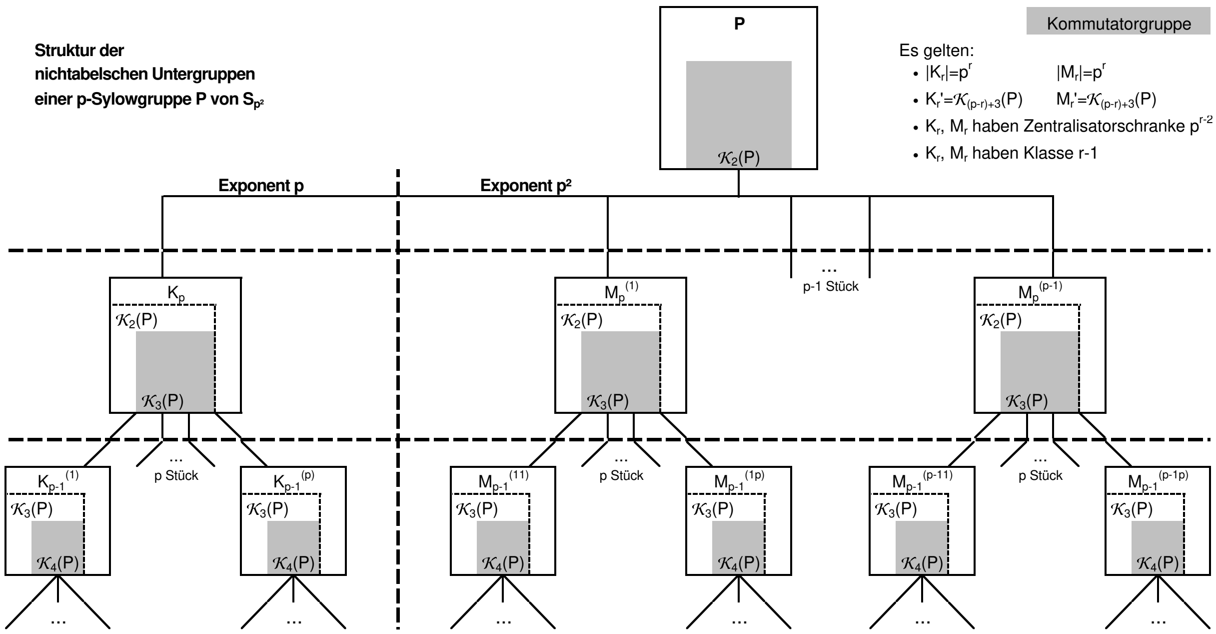

Abbildung 2.5: Strukturskizze der nichtabelschen Untergruppen in P

2.4.16 Satz Es bestehen die Voraussetzungen von 2.4.15, dann gilt:
(i) Für $2 \leq r \leq p$ sind Untergruppen von Ordnung p^r und Exponentem p^2 in P von der Art $M_r := \langle \pi, \mathcal{K}_{p-r+2}(P) \rangle$ mit einem $\pi \in P \setminus \Omega$ von Ordnung p^2.
(ii) Für $2 \leq r \leq p$ gilt: M_r hat die Zentralisatorschranke p^{r-2}, die Kommutatorgruppe $M_r' = \mathcal{K}_{p-r+3}(P)$ und ist nilpotent von Klasse $r-1$.

Außerdem gibt es für $r < p$ in M_{r+1} jeweils p verschiedene Untergruppen vom Typ M_r, was man wieder über Vergleich der Elemente der einzelnen Gruppen erhält. Die vollständige Struktur der nichtabelschen Untergruppen in P ist somit die in Abbildung 2.5 dargestellte.

Schon an dieser Stelle ist uns klar, dass bei den im Anschluß betrachteten Gruppen für die p-Sylowgruppen von $G/D(t)$ gelten muss, dass sie, wenn sie nicht gerade elementarabelsch sind, von Ordnung kleiner gleich p^4 sein werden. Bevor wir nun mit der Untersuchung solcher Gruppen beginnen, soll abschließend noch eine Aussage über die Normalisatoren von Zykeln der Länge p und p^2 in S_{p^2} gemacht werden:

2.4.17 Satz Sei p eine Primzahl, sei π_1 ein Zykel der Länge p in S_{p^2}, sei π_2 ein Zykel der Länge p^2. Dann gilt:
$|N_{S_{p^2}}(\langle \pi_1 \rangle)| = (p^2-p)!\, p(p-1)$ und $|N_{S_{p^2}}(\langle \pi_2 \rangle)| = p^3(p-1)$.

Beweis: Bekanntlich sind in einer symmetrischen Gruppe alle Zykel gleicher Länge zueinander konjugiert. Damit sind auch die von zwei solchen Elementen erzeugten zyklischen Gruppen zueinander konjugiert. Durch einfaches Abzählen unter Berücksichtigung von 1.5.3(i) erhält man, dass es $\frac{(p^2)!}{(p^2-p)!\, p}$ verschiedene Zykel der Länge p und $(p^2-1)!$ verschiedene der Länge p^2 in S_{p^2} gibt. Somit gibt es $\frac{(p^2)!}{(p^2-p)!\, p(p-1)}$ verschiedene, über einem p-Zykel erzeugte zyklische Untergruppen der Ordnung p und $\frac{(p^2-1)!}{p^2-p}$ verschiedene der Ordnung p^2, so dass 1.1.11 und 1.1.6 die Behauptung liefern. #

2.5 p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2

Verfügte eine Gruppe über eine prime Zentralisatorschranke p, so ließen sich mit vergleichsweise elementaren Mitteln zahlreiche Eigenschaften dieser Gruppe herleiten. Der nächste zu betrachtende Fall legt wieder eine Primzahl p zu Grunde, nur dass diesmal die Zentralisatorschranke p^2 betragen soll. Dieser Fall wird sich als deutlich komplizierter erweisen, so dass wir uns in diesem Abschnitt bei unserer Untersuchung erst einmal auf p-Gruppen beschränken.
Erwähnen wir zuerst eine Aussage, auf die wir im Folgenden gelegentlich zurückgreifen werden:

2.5.1 Definition und Satz Sei G eine nichttriviale Gruppe, dann ist die *Frattinigruppe* $\Phi(G)$ definiert als der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen. Ferner sei $\Phi(\{e\}) := \{e\}$. Die Frattinigruppe ist offensichtlich ein Normalteiler von G.
Sei nun p wieder eine Primzahl, seien $n \in \mathbb{N}$ und $|G| = p^n$. Es gelten folgende Eigenschaften:
(i) $\Phi(G) = G'G^p$.
(ii) $G/\Phi(G)$ ist elementarabelsch.
(iii) Für $p = 2$ ist $\Phi(G) = G^2$.
(iv) Sei $|G/\Phi(G)| = p^k$, $k < n$. Dann enthält jedes minimale Erzeugendensystem von G genau k Elemente.

Beweis: Siehe Huppert [4], Seite 272f. #

Beginnen wir diesen Abschnitt, indem wir uns Gedanken darüber machen, wie denn solche p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2 aussehen müssen: Offensichtlich darf G nicht abelsch sein, womit 2.4.1(vi) gelten muss und 2.4.1(vii)-(ix) gerade nicht erfüllt sein dürfen. Damit kann auch die Frattinigruppe gemäß 2.5.1 keine maximale Untergruppe von G sein, womit $|G/\Phi(G)| \geq p^2$ gelten muss.
2.1.3 liefert zudem, dass die Mächtigkeit der Kommutatorgruppe $|G'| \geq p^2$ sein muss (und damit auch $|\Phi(G)| \geq p^2$), womit sich für G ergibt, dass $|G| \geq p^4$ sein muss (vgl. hierzu 2.4.1(vi)).
Auch bzgl. des Zentrums von G kann 2.4.1(vi) noch präzisiert werden: Für eine nichtabelsche Gruppe muss das Zentrum stets eine echte Untergruppe eines jeden Zentralisators sein[7], und da mindestens ein Zentralisator des Index p^2 existiert, muss $|G/Z(G)| \geq p^3$ sein.
Diese Grundüberlegungen werden später die Suche nach Beispielen solcher Gruppen sicherlich erleichtern, weshalb wir sie in einem Satz festhalten wollen:

2.5.2 Satz Sei p eine Primzahl, G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, dann gelten:
(i) $|G| \geq p^4$. (ii) $|G/\Phi(G)| \geq p^2$ und $|\Phi(G)| \geq p^2$.
(iii) $|G/G'| \geq p^2$ und $|G'| \geq p^2$. (iv) $|G/Z(G)| \geq p^3$ und $|Z(G)| \geq p$.

Da G nicht abelsch sein darf, ergibt sich auch, dass nicht nur jedes minimale Erzeugendensystem von G, sondern wegen 2.4.1(vii) auch ein jedes von G/G' mindestens zwei Elemente umfasst.
Dank dieser Eigenschaften können wir uns nun auf die Suche nach ersten Beispielen solcher p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2 machen:

[7] Man zeigt dies per Widerspruch: Sei G nicht abelsch und gebe es ein $g \in G$ mit $Z(G) = C_G(g)$, dann muss $g \in Z(G)$ sein, also ist $Z(G) = C_G(g) = G$ im Widerspruch zur Voraussetzung!

2.5.3 Beispiel Sei p eine Primzahl, seien G_1 und G_2 p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p. Dann hat $G_1 \otimes G_2$ die Zentralisatorschranke p^2 und ist zudem nilpotent der Klasse 2, sowie auflösbar von Stufe 2.

Beweis: Da p-Gruppen nilpotent sind, erzwingen die Ergebnisse zur Zentralisatorschranke p, dass G_1 und G_2 nilpotent von Klasse 2 sind, sowie auflösbar von Stufe 2. Diese Eigenschaften übertragen sich auch auf das direkte Produkt beider Gruppen; zudem folgt aus 2.1.5, dass $G_1 \otimes G_2$ die Zentralisatorschranke p^2 hat. #

2.5.4 Beispiel Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit $|G'| = p^2$, dann hat G die Zentralisatorschranke p^2.

Beweis: Da $|G'| = p^2 > 1$ ist, kann G nicht abelsch sein. Gemäß 2.1.3 verbleiben als mögliche Zentralisatorschranken somit nur p und p^2. Da nach 2.3.54 aus einer Zentralisatorschranke p folgt, dass $|G'| = p$ ist, ergibt sich die Behauptung. #

p-Gruppen mit einer Kommutatorgruppe der Mächtigkeit p^2 haben also die Zentralisatorschranke p^2 (man beachte die Analogie zu 2.3.63!) und sind zudem, da G' abelsch ist, auflösbar von Stufe 2. Die Nilpotenz von p-Gruppen erzwingt außerdem, dass $[G, G']$ gemäß 1.2.12 eine echte Untergruppe von G' ist, womit G in diesem Fall nur nilpotent der Klassen 2 oder 3 sein kann.
Bevor wir ein weiteres Beispiel betrachten, benötigen wir einige Aussagen aus Huppert [4], Seite 258 bzw. Seite 321ff:

2.5.5 Satz Die Gruppe G sei erzeugt über der Menge M, dann gelten:
(i) $\mathcal{K}_i(G) = \langle\ \{[m_1, ..., [m_{i-1}, m_i]...] \mid m_1, ..., m_i \in M\},\ \mathcal{K}_{i+1}(G)\ \rangle$.
(ii) Im Fall $G = \langle a, b\rangle$ ist $\mathcal{K}_2(G) = G' = \langle\ [a, b], \mathcal{K}_3(G)\ \rangle$ und somit $\mathcal{K}_2(G)/\mathcal{K}_3(G)$ zyklisch.

2.5.6 Definition und Satz Sei p eine Primzahl. Eine p-Gruppe G heißt *regulär*, falls für alle $x, y \in G$ die Beziehung $x^p y^p = (xy)^p \cdot K_1^p \cdots K_n^p$ gilt mit geeigneten $K_1, ..., K_n \in \langle x, y\rangle'$.
Folgende Eigenschaften sind hinreichend für die Regularität von G:
(i) Die Klasse von G ist kleiner als p.
(ii) $|G| \leq p^p$. (iii) G' ist zyklisch für $p > 2$. (iv) $Exp(G) = p$.
Für reguläre p-Gruppen gelten:
(v) Ist $p = 2$, so ist G abelsch.
(vi) Ist $p = 3$ und G von zwei Elementen erzeugt, so ist G' zyklisch.

Damit können wir nun ein weiteres Beispiel diskutieren:

2.5.7 Beispiel Sei $p \geq 5$ eine Primzahl, sei G eine von zwei Elementen erzeugte p-Gruppe mit Exponent p und Nilpotenzklasse 3, dann hat G die Zentralisatorschranke p^2.
Zudem ergeben sich folgende Eigenschaften:
(i) Sei $G = \langle x, y\rangle$. Dann ist $G' = \langle [x, y], Z(G)\rangle$.
(ii) G ist auflösbar der Stufe 2 (metaabelsch).
(iii) Es ist $Z(G) = \mathcal{K}_3(G)$.
(iv) Es sind $|G : G'| = p^2$ und $|G : Z(G)| = p^3$.
(v) G/G' ist elementarabelsch.

Beweis: Da G den Exponenten p hat, ist $G^p = \{e\}$, womit 2.5.1 die Behauptung (v) liefert. Sei G also von den Elementen $x, y \neq e$ erzeugt und wegen der Nilpotenzklasse 3 natürlich nicht abelsch und zyklisch, womit $[x, y] \neq e$ gelten muss[8]. Wie alle Elemente ungleich e haben x, y und $[x, y]$ wegen des Exponenten p die Ordnung p. Außerdem liefert die Nilpotenz der Klasse 3 (man vergleiche 1.2.12) zudem, dass $[G, G'] \neq \{e\}$ und somit $G' \not\preceq Z(G)$ ist. Dagegen ist (analog) $[G, G'] \preceq Z(G)$, was zusammen mit 2.3.49 folgende Faktorisierungsmöglichkeiten für die Kommutatoren über beliebigen $a, b, c \in G$ und $j \in \mathbb{Z}$ ergibt:
$[a, bc] = [a, b][a, c] \cdot z$, $[ab, c] = [b, c][a, c] \cdot z$, $[a^j, b] = [a, b]^j \cdot z$ und $[a, b^j] = [a, b]^j \cdot z$ mit jeweils geeignetem $z \in Z(G)$. Somit lässt sich der Kommutator zweier beliebiger Elemente $g, h \in G$ in der Form $[g, h] = [x, y]^k \cdot z$ darstellen, mit geeignetem $k \in \{0, ..., p-1\}$ und $z \in Z(G)$. Also ist $G' \preceq \langle [x, y], Z(G) \rangle$ und $|G : \langle [x, y], Z(G) \rangle| \leq |G : G'|$. $(\star)$
Da G' nicht in $Z(G)$ liegt, darf $\langle [x, y] \rangle \not\preceq Z(G)$, also $[x, y] \notin Z(G)$ sein. Damit ist aber $\langle [x, y], Z(G) \rangle$ abelsch und somit eine echte Untergruppe von G, G' ebenso als Untergruppe von $\langle [x, y], Z(G) \rangle$ abelsch, G also auflösbar der Stufe 2 (vgl. 1.2.7); dies ist (ii).
Da G/G' abelsche Gruppe (siehe 1.2.6) des Exponenten p ist und echt von zwei Elementen der Ordnung p erzeugt wird[9], ist deren Mächtigkeit gleich p^2, also $|G : G'| = p^2$. Dies ist der erste Teil von (iv).
Wegen der Nilpotenzklasse 3 ist $G/Z(G)$ nicht abelsch (vgl. 1.2.12), also $|G/Z(G)| > p^2$ und $|G : \langle [x, y], Z(G) \rangle| > p$; somit ergibt sich mit $(\star)$ die Abschätzung $p < |G : \langle [x, y], Z(G) \rangle| \leq p^2$, also $|G : \langle [x, y], Z(G) \rangle| = p^2$. Damit folgen aber (i) und (iv).
Nach 2.5.5(ii) ist $\mathcal{K}_2(G)/\mathcal{K}_3(G)$ zyklisch, also wegen des Exponenten p gerade $|G'/[G, G']| = p$, womit sich $|G : [G, G']|$ zu p^3 ergibt. Wegen $[G, G'] \preceq Z(G)$ folgt (iii).
Mit den vor 2.5.2 gemachten Überlegungen liefert (iv) nun für ein beliebiges $g \in G$ die Abschätzung $|G : C_G(g)| \leq p^2$. Gäbe es keinen Zentralisator $C_G(h)$ mit Index $|G : C_G(h)| = p^2$, so wäre $|G'| = p$ (vgl. 2.3.54), was der „Ungleichung“ $\{e\} \neq [G, G'] \prec G'$ widerspricht; somit folgt die Zentralisatorschranke p^2. Damit ist alles gezeigt, es gilt nur noch die eingangs gemachte Beschränkung $p \geq 5$ zu rechtfertigen:
Nach 2.5.6(iv) ist G reguläre p-Gruppe, die allerdings nicht abelsch ist; nach 2.5.6(v) kann p also nicht gleich 2 sein. Wäre p dagegen gleich 3, so wären alle Voraussetzungen von 2.5.6(vi) erfüllt und G' somit zyklisch; beim Exponenten p ist dies nur für $|G'| = p$ möglich, was analog ebenfalls einen Widerspruch liefert. #
Später wird man sehen, dass die Mächtigkeit von $\mathcal{K}_3(G)$ auf maximal p^2, im eben erörterten Beispiel die Gruppenordnung also auf p^5 beschränkt ist.

Bevor ein drittes Beispiel zur Zentralisatorschranke p^2 betrachtet wird, soll auf einen neuen Begriff eingegangen werden, den Begriff der *freien Gruppe*.
Hall [1] führt diesen Begriff auf Seite 91ff ein, indem er eine Menge $S := \{s_i | i \in I\}$ von verschiedenen Elementen betrachtet, wobei die Indexmenge I sogar überabzählbar sein darf. Aus diesen Elementen werden dann „Buchstaben“ s_i^1, s_i^{-1} definiert, wobei $s_i^1 = s_i$ und s_i^{-1} ein neues Symbol ist, das noch nicht in S enthalten ist. Diese Menge der Buchstaben kann man dann schreiben als $B = \{s_i^\epsilon | \epsilon = \pm 1, i \in I\}$.
Durch Aneinanderreihung der Buchstaben bildet man nun Wörter und reduziert diese anschließend, indem man aus einem Wort $a_1 \cdots a_n$ Paare $a_k a_{k+1}$ herausstreicht, wenn sie die

[8] Andernfalls wären x und y vertauschbar und G als Erzeugnis über x und y abelsch!

[9] Da G von zwei Elementen erzeugt wird, umfasst ein minimales Erzeugendensystem der Faktorgruppe G/G' höchstens zwei Elemente; nach 2.4.1(vii) darf G/G' im betrachteten Fall aber gerade nicht zyklisch sein, muss also von echt zwei Elementen erzeugt werden.

Form $a_k a_{k+1} = s_i^{\epsilon} s_i^{-\epsilon}$ haben, wieder $\epsilon = \pm 1$ und $i \in I$. Zwei Wörter werden miteinander verknüpft, indem man sie aneinanderreiht und reduziert; das „leere Wort" wird mit e bezeichnet. Auf diese Weise bildet die Menge aller Wörter, die sich über S erzeugen lassen, eine Gruppe G, bei der die Aneinanderreihung die Verknüpfung darstellt, e das neutrale Element ist, und das Inverse zu einem Gruppenelement $f = s_{k_1}^{\epsilon_1} \cdots s_{k_n}^{\epsilon_n}$ das Element $f^{-1} = s_{k_n}^{-\epsilon_n} \cdots s_{k_1}^{-\epsilon_1}$ ist. G ist das Erzeugnis über S, also $G = \langle \{s_i | i \in I\} \rangle$, und wird *freie Gruppe* genannt.
Hall zeigt anschließend die Übereinstimung mit folgender „formaler" Definition:

2.5.8 Definition Die Gruppe F heißt frei vom Rang $|I|$ in den freien Erzeugenden $\{f_i | i \in I\}$, wenn gilt:
(i) $F = \langle \{f_i | i \in I\} \rangle$.
(ii) Ist G eine Gruppe mit einem Erzeugendensystem $\{g_i | i \in I\}$, so gibt es einen Epimorphismus $\varphi : F \to G$ mit $\varphi(f_i) = g_i$ für alle $i \in I$.

Es ist also G isomorph zu $F/Kern(\varphi)$. Umgekehrt kann man auch eine Teilmenge $M \subseteq F$ auswählen und das Erzeugnis über den Konjugierten von Elementen aus M bilden, welche gemäß 2.1.14(i) einen Normalteiler $N := \langle \{fmf^{-1} | m \in M, f \in F\} \rangle$ in F bilden.
$G := F/N$ ist dann die über $\{f_i N | i \in I\}$ erzeugte und von den *Relationen* $m \in M$ definierte freie Gruppe[10].
Auf diese Weise ist es möglich, freie Gruppen mit bestimmten Eigenschaften zu konstruieren: Sei $F := \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ die freie Gruppe vom Rang 3, sei $F_3 := \langle \{f[x,[y,z]]f^{-1} | x,y,z,f \in F\} \rangle$ der über Kommutatoren der Länge 3 erzeugte Normalteiler, dann ist F/F_3 „frei, nilpotent der Klasse 2 und von 3 Elementen erzeugt". Bildet man nun die Faktorgruppe nach $(F/F_3)^p$, $p \in \mathbb{N}$, so ist $G := (F/F_3) \ / \ (F/F_3)^p$ „frei vom Exponenten p, nilpotent der Klasse 2 und von 3 Elementen erzeugt".

2.5.9 Beispiel Sei p eine Primzahl, sei die Gruppe G frei vom Exponenten p, nilpotent der Klasse 2 und von 3 Elementen erzeugt, dann hat G die Zentralisatorschranke p^2.

Beweis: Sei $G = \langle x, y, z \rangle$. Es ist $G' = \langle \{g[u,v]g^{-1} | g,u,v \in G\} \rangle$ die Kommutatorgruppe von G mit minimalem Erzeugendensystem[11] $\{[x,y],[y,z],[z,x]\}$, also $|G'| = p^3$.
Weiter ist G/G' die freie abelsche Gruppe vom Rang 3 mit Exponentem p, also ist $|G/G'| = p^3$. G ist somit eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung p^6, weshalb gilt, dass p^2 ein Teiler von $|G : Z(G)|$ ist (vgl. 2.4.1); andererseits ist G nilpotent von Klasse 2, weshalb $G' \preceq Z(G)$ folgt; somit erhält man: $p^2 \leq |G : Z(G)| \leq p^3$.
Da $Z(G)$ jedoch mit keinem der Zentralisatoren in G übereinstimmen kann (vgl. Fußnote vor 2.5.2), muss $Z(G)$ echt kleiner sein als der größte Zentralisator in G, d.h. für alle $g \in G$ ist $|G : C_G(g)| \leq p^2$.
Läge die Zentralisatorschranke p vor, so müsste $|G'| = p$ sein, also verfügt G über die Zentralisatorschranke p^2, und es gilt $|G : Z(G)| = p^3$ und $Z(G) = G'$.
Die Elemente von G lassen sich eindeutig schreiben in der Form $x^a y^b z^c [x,y]^d [y,z]^e [z,x]^f$ mit $a, ..., f \in \{0, ..., p-1\}$, da G' aus dem Zentrum $Z(G)$ ist, und damit einerseits die Regeln aus 2.3.50 gelten, zudem noch $s^j r^i = (s^j r^i \underline{s^{-j} r^{-i}) r^i s^j} = r^i s^j [s^j, r^i] = r^i s^j [r,s]^{-(i+j)}$ ist, und somit die Faktoren geordnet werden können. #

[10]Vgl. hierzu Huppert [4], Seite 134f.
[11]Vgl. hierzu das Basis Theorem von Hall [1], Seite 175, welches besagt, dass $\mathcal{K}_2(G)/\mathcal{K}_3(G)$ von den nichttrivialen 2er-Kommutatoren der Basiselemente erzeugt wird; zu beachten ist dabei, dass $\mathcal{K}_3(G) = \{e\}$ ist.

Durch diese Beispiele konnte recht eindrucksvoll demonstriert werden, wie groß das Feld ist, in dem wir uns in diesem Kapitel bewegen werden. Die Frage ist nun, ob es neben diesen drei Möglichkeiten noch weitere gibt. Dazu sollen nun ganz in Analogie zu Satz 2.3.34 zwei Fälle unterschieden werden: Fall 1 beschreibt die p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2, deren Zentralisatoren des Index p^2 allesamt Normalteiler sind, bei Fall 2 gibt es mindestens einen Zentralisator des Index p^2, der kein Normalteiler ist. Beginnen wir mit Fall 1, den wir mit einfachen Methoden recht umfassend beschreiben können:

2.5.10 Satz Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Seien alle Zentralisatoren des Index p^2 Normalteiler. Dann gelten:
(i) Für alle $x \in G$ ist $C_G(x) \trianglelefteq G$.
(ii) Es ist $G' \preceq Z(G)$.
(iii) G ist nilpotent der Klasse 2.
(iv) G ist auflösbar der Stufe 2.
(v) Für $p = 2$ ist $Exp(G) > p$.
(vi) Für $p \geq 3$ ist G regulär.

Beweis: (i) Es bleibt nur der Index p zu betrachten: In diesem Fall jedoch ist der Zentralisator eine maximale Untergruppe von G, womit 2.4.1(iii) die Behauptung liefert.
(ii) Somit ist für beliebiges $g \in G$ die Mächtigkeit der Faktorgruppe $|G/C_G(g)| \in \{1, p, p^2\}$, womit diese in jedem Fall abelsch ist, was nach 1.2.5 gleichbedeutend ist mit $G' \preceq C_G(g)$ und deshalb $G' \preceq \bigcap_{g \in G} C_G(g) = Z(G)$.
(iii) Damit ist aber $\mathcal{K}_3(G) = [G, G'] = \{e\}$, womit G höchstens von Klasse 2 ist, und da G nicht abelsch[12] ist, folgt die Behauptung.
(iv) Da nach (ii) gilt, dass $G' \preceq Z(G)$, also $G'' = \{e\}$, und G wiederum nicht abelsch ist, resultiert die Aussage.
(v) und (vi) ergeben sich mit 2.5.6(i), (iv), (v). #

2.5.11 Beispiel Wie die Abschätzungen aus 2.5.2 befürchten lassen, sind die in diesem Kapitel zu betrachtenden Beispiele wesentlich umfangreicher und rechenaufwendiger, so dass wir nun gelegentlich auf das Computeralgebrasystem Maple V.4 zurückgreifen werden, welches über ein sehr umfangreiches Paket zur Gruppentheorie verfügt. Das folgende Beispiel ist eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_8: Zur Primzahl $p = 2$ betrachten wir $G := \langle(1,2,3,4),(1,3),(5,6,7,8),(5,7)\rangle$, welche die Ordnung p^6 hat:

```
> with(group):
> grouporder(permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}));
```

$$64$$

Die Kommutatorgruppe G' berechnet sich zu $G' = \langle(1,3)(2,4)\ ,\ (5,7)(6,8)\rangle$ und hat Ordnung p^2, womit nach 2.5.4 tatsächlich die Zentralisatorschranke p^2 vorliegt:

```
> derived(permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}));
```

$$\mathrm{permgroup}(8, \{[[1, 3], [2, 4]], [[5, 7], [6, 8]]\})$$

```
> grouporder(permgroup(8,{[[5, 7], [6, 8]], [[1, 3], [2, 4]]}));
```

$$4$$

[12] Nach 2.2.1 ist die Aussage „G abelsch“ gleichbedeutend mit einer Zentralisatorschranke 1!

Ein Beispiel eines solchen Zentralisators der Schranke p^2, der wie alle übrigen Zentralisatoren dieser Gruppe ein Normalteiler ist, wäre $C_G(\ (1,2,3,4)(5,7)\ ) = \langle (1,2,3,4),(5,7),(6,8)\rangle$:

```
> centralizer(permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}),
[[1, 2, 3, 4], [5, 7]]);
```

$$\text{permgroup}(8, \{[[1, 2, 3, 4]], [[6, 8]], [[5, 7], [6, 8]]\})$$

```
> grouporder(permgroup(8,{[[1, 2, 3, 4]],[[6, 8]],[[5, 7], [6, 8]]}));
```

$$16$$

```
> pg := permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}):
sg := permgroup(8,{[[5, 7], [6, 8]], [[6, 8]], [[1, 2, 3, 4]]}):
isnormal(pg,sg);
```

$$true$$

In Übereinstimmung mit 2.5.10 endet die absteigende Zentralreihe nach zwei Schritten, womit G nilpotent der Klasse 2 ist:

```
> LCS(permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}));
```

$$[\text{permgroup}(8, \{[[1, 2, 3, 4]], [[1, 3]], [[5, 6, 7, 8]], [[5, 7]]\}),$$
$$\text{permgroup}(8, \{ [[1, 3], [2, 4]], [[5, 7], [6, 8]]\}), \text{permgroup}(8, \{[]\})]$$

Damit liegt natürlich G' im Zentrum von G, aber in diesem Fall stimmt es sogar mit dem Zentrum überein, in jedem Fall ist $G'' = \{e\}$, so dass G auflösbar von Stufe 2 ist:

```
> center(permgroup(8, {[[1,2,3,4]], [[1,3]],[[5,6,7,8]],[[5,7]]}));
```

$$\text{permgroup}(8, \{[[1, 3], [2, 4]], [[5, 7], [6, 8]]\})$$

Die in 2.5.10 gefundenen Aussagen konnten an diesem Beispiel recht eindrucksvoll demonstriert werden.
Übrigens stellt die behandelte Gruppe eine konkrete Realisierung von Beispiel 2.5.3 dar, denn $\langle (1,2,3,4),(1,3)\rangle$ und $\langle (5,6,7,8),(5,7)\rangle$ sind offensichtlich elementfremde Normalteiler der Ordnung 2^3, jeweils isomorph zu einer 2-Sylowgruppe von S_4. Diese aber wiederum sind isomorph zu D_4, welches in 2.3.58 erörtert wurde, womit $G \cong D_4 \otimes D_4$ ist.
Betrachten wir ein weiteres Beispiel, welches eine Realisierung des Beispiels 2.5.9 darstellt:

2.5.12 Beispiel Sei X die Gruppe der oberen unitriangulären 5x5-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}_p$ mit p Elementen, $p > 2$ prim, und sei Y der Normalteiler von X, dessen Matrizen auf der ersten und zweiten Nebendiagonale den Eintrag 0 haben, dann umfasst X/Y jene Matrizen, bei denen die Einträge auf der dritten und vierten Nebendiagonale ohne Belang sind. Sei nun G jene Untergruppe von X/Y, bei der zusätzlich der erste und letzte Eintrag der ersten Nebendiagonale einer jeden Matrix gleich sind, dann ist G eine p-Gruppe der Ordnung p^6:

$$G = \{ \begin{pmatrix} 1 & x & y_1 & * & * \\ & 1 & x_2 & y_2 & * \\ & & 1 & x_3 & y_3 \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | x, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}_p \}.$$

Diese Gruppe lässt sich darstellen als $G = \langle A, B, C\rangle$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 1 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Des Weiteren berechnen sich dann die Kommutatoren der Erzeugenden zu

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ [B,C] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 1 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ [C,A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem bestimmt man eine beliebige Potenz von A (und die der übrigen Matrizen $B, ..., [C,A]$ völlig analog) zu

$$A^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 & * & * \\ & 1 & 0 & 0 & * \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & k \\ & & & & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{K}_p,$$

womit klar ist, dass sich irgendeine Matrix $X \in G$ in der Form $X = A^a B^b C^c [A,B]^d [B,C]^e [C,A]^f$ eindeutig darstellen lässt, mit geeigneten $a, ..., f \in \mathbb{K}_p$.
Man errechnet nun:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x & y_1 & * & * \\ & 1 & x_2 & y_2 & * \\ & & 1 & x_3 & y_3 \\ & & & 1 & x \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:X} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & u & v_1 & * & * \\ & 1 & u_2 & v_2 & * \\ & & 1 & u_3 & v_3 \\ & & & 1 & u \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:U} = \begin{pmatrix} 1 & x+u & y_1+v_1+u_2x & * & * \\ & 1 & x_2+u_2 & y_2+v_2+u_3x_2 & * \\ & & 1 & x_3+u_3 & y_3+v_3+ux_3 \\ & & & 1 & x+u \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -x & xx_2-y_1 & * & * \\ & 1 & -x_2 & x_2x_3-y_2 & * \\ & & 1 & -x_3 & x_3x-y_3 \\ & & & 1 & -x \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$XUX^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u & v_1+u_2x-ux_2 & * & * \\ & 1 & u_2 & v_2+u_3x_2-u_2x_3 & * \\ & & 1 & u_3 & v_3+ux_3-u_3x \\ & & & 1 & u \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sowie } [X,U] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_2x-ux_2 & * & * \\ & 1 & 0 & u_3x_2-u_2x_3 & * \\ & & 1 & 0 & ux_3-u_3x \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir zuerst den Zentralisator $C_G(U)$: Es ist $X \in C_G(U)$ genau dann, wenn seine Einträge folgendes Gleichungssystem erfüllen:
(I) $u_2x - ux_2 = 0$. (II) $u_3x_2 - u_2x_3 = 0$ (III) $ux_3 - u_3x = 0$.
Es lassen sich folgende Fälle unterscheiden (wobei y_1, y_2, y_3 stets beliebig wählbar!):

- $u = 0, u_2 = 0, u_3 = 0$: x, x_2, x_3 beliebig, also ist $U \in Z(G)$.
- $u = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0$: $x = x_2 = 0,\ x_3$ beliebig, also Mächtigkeit p^4 und Index p^2.
- $u = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0$: $x = x_3 = 0,\ x_2$ beliebig, also Mächtigkeit p^4 und Index p^2.
- $u = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0$: $x = 0,\ x_2 = \frac{u_2}{u_3}x_3$, also Mächtigkeit p^4 und Index p^2.
- $u \neq 0$: $x_2 = \frac{u_2}{u}x,\ x_3 = \frac{u_3}{u}x$ beliebig, also Mächtigkeit p^4 und Index p^2.

Damit hat G die Zentralisatorschranke p^2, und es lässt sich leicht nachweisen, dass alle Zentralisatoren Normalteiler sind. Zudem stimmen Zentrum und Kommutatorgruppe überein, sind beide jeweils sowohl vom Index als auch von Mächtigkeit p^3:

$$Z(G) = G' = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y_1 & * & * \\ & 1 & 0 & y_2 & * \\ & & 1 & 0 & y_3 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{K}_p \}.$$

Ergo ist G auflösbar von Stufe 2 und nilpotent von Klasse 2. Nochmals sei darauf verwiesen, dass es sich bei diesem Beispiel um eine konkrete Realisierung von 2.5.9 handelt.

Schließen wir diesen Fall mit den zwei folgenden Beispielen ab, die insbesondere dahingehend interessant sind, dass die Zahl der Erzeugenden und die Mächtigkeit des Zentrums gegenüber vorigen Beispielen variiert:

2.5.13 Beispiel Sei G die Gruppe der oberen unitriangulären 3x3-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}_{p^2}$ mit p^2 Elementen, p prim, dann ist $|G| = p^6$. Man berechnet:

$$A \cdot X := \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+x & b+y+az \\ & 1 & c+z \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & -b+ac \\ & 1 & -c \\ & & 1 \end{pmatrix}, AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y+az-cx \\ & 1 & z \\ & & 1 \end{pmatrix}, [A, X] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & az-cx \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wahl von $a = 1$ und $c = 0$ im Kommutator $[A, X]$ zeigt, dass

$$G' = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & y \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix} | y \in \mathbb{K}_{p^2} \} \text{ von Ordnung } p^2 \text{ ist.}$$

Nach 2.5.4 hat dies die Zentralisatorschranke p^2 zur Folge. Es ist $A \in C_G(X)$ genau dann, wenn $az - cx = 0$ gilt, d.h. man unterscheidet folgende Fälle:

- $x = z = 0$: Hier kann irgendein A gewählt werden, es ist also $X \in Z(G)$.
- $x \neq 0, z = 0$: Nun ist $c = 0$ und a beliebig, somit ist $|G : C_G(X)| = p^2$.
- $z \neq 0$: Jetzt ist $a = \frac{x}{z}c$, also wieder $|G : C_G(X)| = p^2$.

Man sieht auch, dass $Z(G) = G'$ ist, womit G nilpotent von Klasse 2 und auflösbar von Stufe 2 ist. In der Gruppe gilt für $U := \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und $W := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & y \\ & & 1 \end{pmatrix}$, dass der Kommutator $[U, W] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & xy \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ und $U^k = \begin{pmatrix} 1 & kx & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ für $0 \leq k \leq p-1$ ist (zu beachten ist hier, dass $char(\mathbb{K}_{p^2}) = p$ ist); Analoges zeigt man für W und $[U, W]$. Somit sind vier Erzeugende notwendig, was auch durch den Index der Frattinigruppe $\Phi(G)$ bestätigt wird (vgl. 2.5.1(iv)), denn es ist $\Phi(G) = G'$. Dies zeigt man mit 2.5.1(i) und der Tatsache, dass G vom Exponenten p ist, denn für $2 \leq k \leq p$ ist $\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ka & kb + \frac{(k-1)k}{2}ac \\ & 1 & kc \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

2.5.14 Beispiel Sei p Primzahl. Über dem Körper $\mathbb{K}_p$ betrachte man die Gruppe

$$G := \{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & 1 & y_1 & y_2 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | x_1, ..., x_4, y_1, y_2 \in \mathbb{K}_p \},$$

welche offensichtlich von Ordnung p^6 ist. Man errechnet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ & 1 & b_1 & b_2 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & 1 & y_1 & y_2 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}}_{=:X} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + x_1 & a_2 + x_2 + a_1 y_1 & a_3 + x_3 + a_1 y_2 & a_4 + x_4 \\ & 1 & b_1 + y_1 & b_2 + y_2 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 + a_1 b_1 & -a_3 + a_1 b_2 & -a_4 \\ & 1 & -b_1 & -b_2 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$AXA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 + a_1 y_1 - b_1 x_1 & x_3 + a_1 y_2 - b_2 x_1 & x_4 \\ & 1 & y_1 & y_2 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{sowie } [A, X] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 y_1 - b_1 x_1 & a_1 y_2 - b_2 x_1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Wahl von $a_1 = 1$ und $x_1 = 0$ in $[A, X]$ zeigt man, dass

$$G' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | x_2, x_3 \in \mathbb{K}_p\}$$

und von Mächtigkeit p^2, G also nach 2.5.4 von Zentralisatorschranke p^2 ist. Im Einzelnen erhält man, dass $A \in C_G(X)$ ist genau dann, wenn die Gleichungen $a_1y_1 - b_1x_1 = 0$ und $a_1y_2 - b_2x_1 = 0$ erfüllt sind; man unterscheidet deshalb folgende Fälle:

- $x_1 = y_1 = y_2 = 0$: Dann kann A beliebig gewählt werden, es ist also $X \in Z(G)$.
- $x_1 = 0,\ y_1 \neq 0 \vee y_2 \neq 0$: Dann ist $a_1 = 0$ und somit $|G : C_G(X)| = p$.
- $x_1 \neq 0$:Dann sind $b_1 = \frac{y_1}{x_1}a_1$ und $b_2 = \frac{y_2}{x_1}a_1$, also $|G : C_G(X)| = p^2$.

G ist nilpotent von Klasse 2, sowie auflösbar von Stufe 2, denn G' ist eine echte Untergruppe des Zentrums

$$Z(G) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_3 & x_4 \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{K}_p\}.$$

G lässt sich von vier Elementen erzeugen[13], G' von zwei Elementen.

Gehen wir nun zum Fall über, dass mindestens ein Zentralisator des Index p^2 existiert, der kein Normalteiler ist. Wir werden später zeigen, dass dann zumindest die Bedingung $[x, [x, [y, z]]] = e$ für alle $x, y, z \in G$ erfüllt ist. Diese Bedingung beinhaltet natürlich auch, dass stets $[x, [x, [x, y]]] = e$ ist, also die 3-Engelbedingung gilt. Der folgende Satz von Heineken [2] würde somit liefern, dass die Gruppe G, mit Ausnahme $p = 2$ oder 5, nilpotent der Klasse höchstens 4 ist:

2.5.15 Satz Sei $[x, [x, [x, y]]] = e$ für alle $x, y \in G$ (3-Engelbedingung) und enthalte G keine Elemente der Ordnung 2 oder 5, so ist G nilpotent von höchstens Klasse 4.

Beweis: Der Satz ist in Heineken [2] bewiesen, wobei beachtet werden muss, dass die Kommutatoren dort anders definiert sind (der Kommutator von $a, b \in G$ ist dort gleich $[a^{-1}, b^{-1}]$). #

Andererseits haben wir eine stärkere Ausgangsbedingung als nur die 3-Engelbedingung vorliegen, was die Hoffnung regt, diese Aussage noch verschärfen zu können, und wenn man diese Bedingung im eben genannten Beweis von Heineken auf Seite 700 unten, nach Aussage (10), berücksichtigt, so erhält man, dass die Beschränkung auf Elemente von Ordnung ungleich 5 entfällt[14]. Somit können wir formulieren:

---

[13] Dies sind die Matrizen X derart, dass genau ein Element von $\{x_1, x_4, y_1, y_2\}$ gleich 1, alle anderen Komponenten gleich 0 sind. Durch Kommutatorbildung erreicht man, dass ausschließlich x_2 oder x_3 gleich 1 ist.

[14] In der von Heineken verwendeten Schreibweise würde es an genannter Stelle heißen:
$1 = (y \circ ((yz)^{(3)} \circ x))(y \circ ((yz^{-1})^{(3)} \circ x)) = \underbrace{(y \circ (z^{(2)} \circ (y \circ x)))^2}_{=1}(y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^2 \underbrace{(y^{(2)} \circ (z^{(2)} \circ x))^2}_{=1} = (y \circ (z \circ (y \circ (z \circ x))))^2$, womit die Einschränkung auf Elemente von Ordnung ungleich 5 überflüssig wird.

2.5.16 Lemma Sei $[x,[x,[y,z]]] = e$ für alle $x, y, z \in G$ und enthalte G keine Elemente der Ordnung 2, so ist G nilpotent von höchstens Klasse 4.

Doch auch diese Aussage stellt uns noch nicht zufrieden, und wir werden später tatsächlich zeigen können, dass die Bedingung $[x,[x,[y,z]]] = e$ unter der Einschränkung „Keine Elemente von Ordnung 2“ sogar Nilpotenzklasse 3 (und damit einhergehend Auflösbarkeit der Stufe 2) zur Konsequenz hat. Immerhin haben wir aber eine Ausgangsposition, nämlich die Nilpotenz von höchstens Klasse 4, von der aus nun versucht werden soll, weitere Resultate herzuleiten. Beginnen wir also mit ein paar Aussagen, die allgemein in nilpotenten Gruppen der Klasse 4 gelten:

2.5.17 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse 4, dann gelten:
(i) Für alle $u, v, w, x, y \in G$ ist $[u,[v,[w,[x,y]]]] = e$ und $[v,[w,[x,y]]] \in Z(G)$.
(ii) Für alle $u, v, w, x, y \in G$ ist $[xy,[u,[v,w]]] = [x,[u,[v,w]]] \cdot [y,[u,[v,w]]]$.
(iii) Für alle $u, v, w, x, y \in G$ ist $[u,[xy,[v,w]]] = [u,[x,[v,w]]] \cdot [u,[y,[v,w]]]$.

Beweis: (i) Folgt direkt aus der Definition der Klasse in 1.2.12.
(ii) 2.3.49(i) ergibt:
$$[xy,[u,[v,w]]] = \underbrace{[x,[y,[u,[v,w]]]]}_{=e} \cdot \underbrace{[y,[u,[v,w]]]}_{\in Z(G)} \cdot \underbrace{[x,[u,[v,w]]]}_{\in Z(G)} = [x,[u,[v,w]]] \cdot [y,[u,[v,w]]].$$
(iii) Hier wenden wir zuerst 2.3.49(i), dann mehrmals 2.3.49(ii) an:
$$[u,[xy,[v,w]]] = [u\ ,\ \underbrace{[x,[y,[v,w]]]}_{\in Z(G)} \cdot ([y,[v,w]] \cdot [x,[v,w]])\ ] = [u\ ,\ [y,[v,w]] \cdot [x,[v,w]]\ ] =$$
$$\underbrace{[u,[y,[v,w]]]}_{\in Z(G)} \cdot \underbrace{[\ [y,[v,w]]\ ,\ [u,[x,[v,w]]]\ ]}_{=e,\ da\ [u,[x,[v,w]]] \in Z(G)} \cdot \underbrace{[u,[x,[v,w]]]}_{\in Z(G)} = [u,[x,[v,w]]] \cdot [u,[y,[v,w]]].$$ #

Bevor wir weitere Eigenschaften nilpotenter Gruppen von Klasse 4 angeben können, benötigen wir die folgende Gleichung:

2.5.18 Lemma (WITTSCHE IDENTITÄT) Sei G eine Gruppe, dann gilt für alle $a, b, c \in G$:
(i) $a[c,[a^{-1},b]]a^{-1} \cdot b[a,[b^{-1},c]]b^{-1} \cdot c[b,[c^{-1},a]]c^{-1} = e$.
(ii) $[a,[c,[a^{-1},b]]] \cdot [c,[a^{-1},b]] \cdot [b,[a,[b^{-1},c]]] \cdot [a,[b^{-1},c]] \cdot [c,[b,[c^{-1},a]]] \cdot [b,[c^{-1},a]] = e$.

Beweis: (i) Der Satz ist in Huppert [4], Seite 254, bewiesen, wobei beachtet werden muss, dass die Kommutatoren dort anders definiert sind (der Kommutator von $a, b \in G$ ist dort gleich $[a^{-1}, b^{-1}]$). Aussage (ii) ist eine äquivalente Formulierung zu (i). #

2.5.19 Korollar Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse 4, dann gelten:
(i) G ist auflösbar von höchstens Stufe 3.
(ii) Seien $g, h \in G$ und $k \in G'$ beliebig, dann gilt: $[g,[h^{-1},k]] \cdot [h,[k^{-1},g]] \cdot [k,[g^{-1},h]] = e$.

Beweis: Seien $g, h \in G$ und $k \in G'$ beliebig, dann liefert 2.5.18(ii) unter Berücksichtigung von 2.5.17 folgende Identität: (man ersetze $a \to h$, $b \to k$ und $c \to g$)
$$e \cdot \underbrace{[g,[h^{-1},k]]}_{\in Z(G)} \cdot e \cdot \underbrace{[h,[k^{-1},g]]}_{\in Z(G)} \cdot \underbrace{[g,[k,[g^{-1},h]]]}_{\in Z(G)} \cdot [k,[g^{-1},h]] = e.$$
Also muss auch $[k,[g^{-1},h]] \in Z(G)$ gelten und somit $G'' = [G', G'] \preceq Z(G)$, also $G''' = \{e\}$; dies ist (i). Andererseits muss dann aber $[g\ ,\ \underbrace{[k,[g^{-1},h]]}_{\in Z(G)}\ ] = e$ sein, womit (ii) folgt. #

Damit ist es nun möglich, die in 2.5.17 begonnenen Faktorisierungen von Kommutatoren der Länge 4 fortzusetzen, wobei insbesondere die Ergebnisse (iv) und (viii) hervorzuheben sind, besagen sie doch, dass Inversion von außen an einem Kommutator der Länge 3 oder 4 eine Alternierung der zwei innersten Komponenten bedeutet:

2.5.20 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse 4, dann gelten:
(i) Für alle $a,b,x,y,z \in G$ ist $[\ [a,b]\ ,\ [x,[y,z]]\ ] = e$.
(ii) Für alle $a,b,u,v,x,y \in G$ ist $[a,[b\ ,\ [u,v]\cdot[x,y]\ ]] = [a,[b,[u,v]]]\cdot[a,[b,[x,y]]]$.
(iii) Für alle $a,b,c,d \in G$ ist $[a,[b,\ [c,d^{-1}]\ ]] = [a,[b,\ [c,d]^{-1}\ ]] = [a,[b,\ [c^{-1},d]\ ]]$.
(iv) Für alle $x,u,v \in G$ ist $[x,[u,v]]^{-1} = [x,[u,v]^{-1}]$.
(v) Für alle $x,u,v \in G$ ist $[x,[u,v]]^2 = [x,[u,v]^2]$.
(vi) Für alle $a,b,c,u,v \in G$ ist $[u,[v,[ab,c]]] = [u,[v,[a,c]]]\cdot[u,[v,[b,c]]]$.
(vii) Für alle $a,b,c,u,v \in G$ ist $[u,[v,[a,bc]]] = [u,[v,[a,b]]]\cdot[u,[v,[a,c]]]$.
(viii) Für alle $a,b,c,d \in G$ ist $[a,[b,\ [c,d]\ ]]^{-1} = [a,[b,\ [d,c]\ ]]$.
(ix) Für alle $a,b,c,d \in G$ ist $[a,\ [b,\ [c,d]\ ]]^{-1} = [a^{-1},\ [b,[c,d]]]$.

Beweis: (i) Seien $g,h \in G$ und $k \in G'$ beliebig, dann gilt nach 2.5.19(ii):
$[k,[g^{-1},h]] = [[k^{-1},g],h]\cdot[[h^{-1},k],g]$. Seien nun $x,y,z \in G$ beliebig gewählt und $k := [x,[y,z]]$, dann gilt:
$[[x,[y,z]],[g^{-1},h]] = \underbrace{[[\ [[y,z],x]\ ,g],h]}_{=e,\ nach\ 2.5.17(i)}\cdot\underbrace{[[h^{-1},\ [x,[y,z]]\ ],g]}_{=e,\ nach\ 2.5.17(i)} = e$, womit die Behauptung folgt.
(ii) Seien $a,b,c,d \in G$ beliebig gewählt, dann erhält man durch mehrmalige Anwendung von 2.3.49(i): $[a,\ [b,cd]\ ] = [a,\ [b,c]\cdot([c,[b,d]][b,d])\ ]] =$
$[a,[b,c]]\cdot\underbrace{[[b,c]\ ,\ [a,\ ([c,[b,d]][b,d])\ ]]}_{\in[G',[G,G']]=\{e\}\ nach\ (i)}\cdot[a,\ [c,[b,d]]\cdot[b,d]\ ] =$
$[a,[b,c]]\cdot\underbrace{[a,[c,[b,d]]]}_{\in Z(G)}\cdot\underbrace{[\ [c,[b,d]]\ ,\ [a,[b,d]]\ ]}_{\in[G',[G,G']]=\{e\}\ nach\ (i)}\cdot[a,[b,d]] = [a,[b,c]]\cdot[a,[b,d]]\cdot[a,[c,[b,d]]]$.
Durch Wahl von $c := [u,v]$ und $d := [x,y]$ für irgendwelche $u,v,x,y \in G$ entfällt der Faktor $[a,[\ [u,v]\ ,[b,\ [u,v]\ ]]\ ] = e$ als Kommutator der Länge 5, womit die Aussage folgt.
(iii) Der Kommutator $[c,d^{-1}]$ lässt sich auch schreiben als
$[c,d^{-1}] = \underline{cd^{-1}c^{-1}}d = d^{-1}[d,c]d = [d^{-1},[d,c]]\cdot[d,c]$, womit sich unter Anwendung von (ii) ergibt:
$[a,[b,\ [c,d^{-1}]\ ]] = [a,[b,\ [d^{-1},[d,c]]\cdot[d,c]\ ]] = \underbrace{[a,[b,\ [d^{-1},[d,c]]\ ]]}_{=e,\ nach\ 2.5.17(i)}\cdot[a,[b,\ \underbrace{[d,c]}_{=[c,d]^{-1}}\ ]]$ und damit
weiter: $[a,[b,\ \underbrace{[d,c]}_{=[d,(c^{-1})^{-1}]}\ ]] = [a,[b,\ [d,c^{-1}]^{-1}\ ]] = [a,[b,\ [c^{-1},d]\ ]]$, womit alles gezeigt ist.
(iv) $[x,[u,v]^{-1}] = \underline{x[v,u]x^{-1}}[u,v] = [v,u]\ [[u,v],x]\ [u,v] = \underbrace{[\ [v,u],[[u,v],x]\ ]}_{=e,\ nach\ (i)}\ [[u,v],x] = [x,[u,v]]^{-1}$.
(v) Äquivalent zu (iv) ist: $[u,v]x[v,u]x^{-1} = x[v,u]x^{-1}[u,v] \ \Leftrightarrow$
$[u,v]\cdot([u,v]x[v,u])\cdot[v,u]x^{-1} = [u,v]\cdot(x[v,u]x^{-1}[u,v]x)\cdot[v,u]x^{-1} \ \Leftrightarrow\ [[u,v]^2,x] = [[u,v],x]^2$.
(vi) Mit 2.3.49 und (ii) (bzw. zu (ii) analoger Beweisführung) erhält man $[u,[v,\ [ab,c]\ ]] =$
$[u,[v,\ [a,[b,c]][b,c][a,c]\ ]] = \underbrace{[u,[v,[a,[b,c]]]]}_{=e}\cdot[u,[v,[b,c]]]\cdot[u,[v,[a,c]]] = [u,[v,[a,c]]]\cdot[u,[v,[b,c]]]$.
(vii) beweist man analog zu (vi).
(viii) Zweimalige Anwendung von (iv) ergibt $[a,[b,\ [c,d]^{-1}\ ]] = [a,\ [b,[c,d]]^{-1}\ ] = [a,[b,[c,d]]]^{-1}$.
(ix) ist eine Konsequenz aus 2.5.17(i) und 2.3.62. #

Damit haben wir jetzt das „Handwerkszeug“ zusammen, um uns an den angekündigten Fall einer Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2 zu machen, bei der einer der Zentralisatoren (des Index p^2) kein Normalteiler ist:

2.5.21 Satz Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, bei der ein nicht normaler Zentralisator des Index p^2 existiert, dann gelten:
(i) Für alle $x, y, z \in G$ ist $[x, [x, [y, z]]] = e$.
(ii) Für alle $x, y \in G$ ist $[x, [x, y^p]] = e$.
(iii) Für $p \neq 2$ ist G nilpotent von höchstens Klasse 4.

Beweis: (i) Sei $C_G(t)$ kein Normalteiler in G und vom Index p^2; dann muss nach 2.4.1(ii) der Normalisator von $C_G(t)$ den Index p haben: $|G : N_G(\ C_G(t)\ )| = p$.
Damit ist jedoch $N_G(\ C_G(t)\ )$ eine maximale Untergruppe in G, womit nach 2.5.1 die Frattinigruppe und damit auch G' im Normalisator enthalten sein muss, d.h. es gilt:
Für alle $k \in G'$ ist $kC_G(t)k^{-1} = C_G(t)$.
Seien nun $y, z \in G$ beliebig, dann ist $t^{-1} \in C_G(t)$ und darum auch $[y, z]t^{-1}[y, z]^{-1} \in C_G(t)$. Somit ist auch $[t, [y, z]] = t \cdot ([y, z]t^{-1}[y, z]^{-1}) \ \in C_G(t)$ und demgemäß $[t,\ [t, [y, z]]\ ] = e$ (wobei $t \in G$ so gewählt war, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler von G ist).
Ist $r \in G$ dagegen so gewählt, dass $C_G(r) \trianglelefteq G$ gilt, dann ergibt sich analog dem Beweis von 2.5.10 die 2-Engelbedingung, womit auch $[r, [r, [y, z]]] = e$ gilt; damit ist (i) gezeigt.
(ii) zeigt man analog unter Berücksichtigung von $G^p \preceq \Phi(G)$.
(iii) folgt direkt aus (i) und 2.5.16. #

Setzen wir also im Folgenden die Bedingung 2.5.21(i) sowie Nilpotenz der Klasse ≤ 4 voraus (für $p \neq 2$) und versuchen weitere Eigenschaften von G zu finden. In einem ersten Schritt erhalten wir dabei in Ergänzung zu 2.5.20(iv) und (v):

2.5.22 Lemma Sei G eine Gruppe, welche die Bedingung $[x, [x, [y, z]]] = e$ für alle $x, y, z \in G$ erfülle, dann gelten:
(i) Für alle $x, y, z \in G$ ist $[x, [y, z]]^2 = [x^2, [y, z]]$.
(ii) Für alle $x, y, z \in G$ ist $[x, [y, z]]^{-1} = [x^{-1}, [y, z]]$.

Beweis: (i) Eine andere Formulierung von 2.3.49(ii) ist: $[a, [b, c]] = [ab, c][c, a][c, b]$. Damit erhält man für beliebige $x, y \in G$ die Faktorisierung $[x, [x, y]] = [x^2, y] \cdot [y, x]^2$.
Seien nun $x, y, z \in G$ beliebig gewählt, dann erhält man unter Berücksichtigung der Voraussetzung folgende Gleichung, die nach Inversion die Behauptung liefert:

$$e = [x, [x, [y, z]]] = [x^2, [y, z]] \cdot [[y, z], x]^2 \ \Leftrightarrow\ [[y, z], x]^2 = [x^2, [y, z]]^{-1} = [[y, z], x^2].$$

(ii) Aus (i) folgt nun (am Schluß erneut invertieren):

$$x[y, z]x^{-1}[z, y]x[y, z]x^{-1}[z, y] = [x, [y, z]]^2 = [x^2, [y, z]] = x^2[y, z]x^{-2}[z, y]$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{[y, z]x^{-1}[z, y]x}_{=[[y,z],x^{-1}]}[y, z] = x[y, z]x^{-1} \Longleftrightarrow [[y, z], x^{-1}] = [x, [y, z]].$$ #

In 2.5.20(viii) konnte bereits gezeigt werden, dass Inversion von außen Alternierung der zwei inneren Argumente eines Kommutators der Länge 4 bedeutet; mit der zusätzlichen Bedingung $[x, [x, [y, z]]] = e$ folgt nun, dass sich eine derartige Inversion auch durch Vertauschung der zwei äußeren Komponenten ausdrücken lässt:

2.5.23 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe der Klasse 4, welche $[x,[x,[y,z]]] = e$ für alle $x,y,z \in G$ erfülle, dann gilt:
Für alle $a,b,c,d \in G$ ist $[a,[b\ ,[c,d]]]^{-1} = [b,[a\ ,[c,d]]]$.

Beweis: Es kann 2.5.17 angewendet werden, womit man mit obiger Voraussetzung erhält:

$$e = [ab,[ab,[c,d]]] = \underbrace{[a,[a,[c,d]]]}_{=e} \cdot [a,[b,[c,d]]] \cdot [b,[a,[c,d]]] \cdot \underbrace{[b,[b,[c,d]]]}_{=e}. \ \#$$

2.5.24 Korollar Sei G gegeben wie in 2.5.23, dann gilt:
Für alle $u,v,x,y \in G$ ist $[\ [u,v]\ ,\ [x,y]\ ] = [x,\ [y,[u,v]]\ ]^{-2}$.

Beweis: Unter Verwendung von 2.5.19, 2.5.20(viii), 2.5.22 und 2.5.23 erhält man:

$$[\ [u,v]\ ,\ [x,y]\ ] = [\ \underbrace{[[v,u],x^{-1}]}_{=[x,[v,u]]}\ ,y] \cdot \underbrace{[\ [y^{-1},[u,v]]\ ,\ x^{-1}]}_{=[x^{-1},\ [y^{-1},[u,v]]\ ]^{-1}} = [y\ ,\ [x,[v,u]]\ ]^{-1} \cdot \underbrace{[x,\ [y^{-1},[u,v]]\ ]}_{=[y^{-1},\ [x,[u,v]]\ ]^{-1}} =$$
$$\underbrace{[y\ ,\ [x,[v,u]]\ ]^{-1}}_{=[y,[x,\ [u,v]\ ]]} \cdot [y,\ [x,[u,v]]\ ]. \qquad \#$$

Damit ist die „Ziellinie“ schon in Sichtweite. Wenden wir nochmals die in 2.5.18(ii) gegebene Formulierung der Wittschen Identität an, so erhalten wir unter Berücksichtigung von 2.5.17 eine weitere Schreibweise von Kommutatoren der Länge 4, aus der dann schließlich eine sehr wichtige Eigenschaft folgt:

2.5.25 Lemma Sei G gegeben wie in 2.5.23, dann gilt:
Für alle $a,b,c,d \in G$ ist $[a,[b,[c,d]]] = [a,[d,[c,b]]] \cdot [a,[c,[b,d]]]$.

Beweis: Eine andere Formulierung von 2.5.18(ii) besagt für beliebige $a,b,c \in G$:

$$\underline{[a,[b,c]]} = [[a,[b,c]],b^{-1}] \cdot \underline{[[a^{-1},b^{-1}],c]} \cdot [[c,[a^{-1},b^{-1}]],a] \cdot \underline{[[c^{-1},a],b^{-1}]} \cdot [[b^{-1},[c^{-1},a]],c].$$

Sei auch $u \in G$ beliebig. Gesucht ist nun eine andere Schreibweise für $[u,\ [a,[b,c]]\ ]$. Dazu setzen wir eben gefundenen Ausdruck in das hintere Argument des äußersten Kommutators ein und wenden 2.3.49(i) mehrfach an. Wenn man berücksichtigt, dass Kommutatoren der Länge 5 verschwinden (vgl. hierzu 2.5.17(i) und 2.5.20(i)), dann erhält man folgende Gleichung:

$$[u,[a,[b,c]]] = [u,[[a^{-1},b^{-1}],c]] \cdot [u,[[c^{-1},a],b^{-1}]].$$

Nun wenden wir die in 2.5.20(iii),(iv), 2.5.22(ii) und 2.5.23 gefundenen Inversionsregeln an und erhalten nach endlich vielen Schritten für irgendwelche $a,b,c,d \in G$:

$$[a,[b,[c,d]]] = [a,[[b^{-1},c^{-1}],d]] \cdot [a,[[d^{-1},b],c^{-1}]] = [a,[d,[b^{-1},c^{-1}]]^{-1}] \cdot [a,[c^{-1},[d^{-1},b]]^{-1}]$$
$$= [a,[d,\ [b^{-1},c]]\ ] \cdot [a,[c\ ,\ [d^{-1},b]]\ ] = [a,[d,\ [b,c]^{-1}]\ ] \cdot [a,[c\ ,\ [d,b]^{-1}]\ ]$$
$$= [a,[d,[c,b]]] \cdot [a,[c,[b,d]]]. \qquad \#$$

2.5.26 Korollar Sei G gegeben wie in 2.5.23, dann gilt:
Es ist $[x,[y,[y,z]]] = [z,[y,[y,x]]]$ für alle $x,y,z \in G$.

Beweis: Mit 2.5.25 und den eben verwendeten Inversionsregeln erhält man

$$[\underline{x,[y},[\underline{y,z}]]] = [y,[x,[z,y]]] = [\underline{y,[y},[z,x]]] \cdot [\underline{y,[z},[\underline{x,y}]]] = e \cdot [z,[y,[y,x]]]. \qquad \#$$

2.5.27 Korollar Sei G gegeben wie in 2.5.23, enthalte zudem keine Elemente der Ordnung 2, dann gilt für alle $x, y, z \in G$: (i) $[\,[x,y]\,,\;[y,z]\,] = e$. (ii) $[x,[y,[y,z]]] = e$.

Beweis: (i) 2.5.24 und 2.5.26 ergeben folgende Gleichung, welche die Behauptung liefert: $[[x,y],[y,z]]^{-1} = [[y,z],[x,y]] = [x,[y,[y,z]]]^{-2} = [z,[y,[y,x]]]^{-2} = [[y,x],[z,y]] = [[x,y],[y,z]]$.
(ii) Dies ergibt aber mit 2.5.24 auch $[x,[y,[y,z]]]^{-2} = e$, und da G keine Elemente der Ordnung 2 enthält, folgt $[x,[y,[y,z]]] = e$. #

An dieser Stelle könnten wir jetzt schon den gewünschten Schluss ziehen, dass nämlich (unter obigen Bedingungen) statt Nilpotenz der Klasse 4 sogar Nilpotenz von höchstens Klasse 3 vorliegt, denn ein Satz in Heineken [3] besagt[15]:

2.5.28 Satz Sei G eine Gruppe. Gelten für alle $x, y, z \in G$ die Bedingungen $[x,[y,[y,z]]] = e$ und $[x,[x,[y,z]]] = e$, so ist G nilpotent von höchstens Klasse 3.

Da uns zu dem gleichen Ergebnis nur noch wenige Beweisschritte fehlen, die uns zudem noch eine weitere Folgerung erlauben, soll der Beweis hier zu Ende geführt werden:

2.5.29 Lemma Sei G gegeben wie in 2.5.27, dann gilt für alle $a, b, c, d \in G$:
(i) $[a,\;[b,[c\;,d]]]^{-1} = [a,\;[c,[b\;,d]]]$. (ii) $[\,[a,b]\;,\;[c,d]\,] = e$. (iii) $[a,[b,[c,d]]]^3 = e$.

Beweis: (i) Die Beweisführung verläuft analog zu der von 2.5.23(i). Unter Verwendung von 2.5.17(iii) und 2.5.20(vi) sowie 2.5.27(ii) erhält man

$$e = [a,[bc,[bc,d]]] = \underbrace{[a,[b,[b,d]]]}_{=e} \cdot [a,[b,[c,d]]] \cdot [a,[c,[b,d]]] \cdot \underbrace{[a,[c,[c,d]]]}_{=e}.$$

(ii) Unter Anwendung der in 2.5.23 und (i) angegebenen Inversionsregeln erhält man durch jeweils zweifache Anwendung $[\underline{c,[d,[a}, b]]] = [a,[\underline{c,[d,b}]]] = [a,[b,[c,d]]]$, womit also auch $[c,[d,[a,b]]]^{-2} = [a,[b,[c,d]]]^{-2}$ und mit 2.5.24 auch $[[a,b],[c,d]] = [[c,d],[a,b]] = [[a,b],[c,d]]^{-1}$ folgt, was wiederum die Behauptung liefert.
(iii) Nach 2.5.25 ist $[a,[b,[c,d]]] = [a,[d,[c,b]]] \cdot [a,[c,[b,d]]]$, was äquivalent ist zu $[a,[d,[c,b]]] \cdot [a,[c,[b,d]]] \cdot [a,[b,[c,d]]]^{-1} = e$. Mit 2.5.23 und (i) erhält man nun
$[a,\;[\underline{d,[c,b}]]\,] = [a,[b,\;[\underline{d,c}]\,]] = [a,[b,[c,d]]]^{-1}$ sowie $[a,[\underline{c,[b},d]]] = [a,[b,[c,d]]]^{-1}$. #

2.5.30 Satz Sei G eine Gruppe, welche die Bedingung $[x,[x,[y,z]]] = e$ für alle $x, y, z \in G$ erfülle und keine Elemente der Ordnung 2 enthalte, dann gilt:
(i) G ist nilpotent von höchstens Klasse 3.
(ii) G ist auflösbar der Stufe 2.

Beweis: Die gegebene Gruppe erfüllt alle Voraussetzungen von 2.5.15 und ist somit nilpotent von höchstens Klasse 4. Damit kann 2.5.29(ii) angewendet werden: Dieses ergibt einerseits, dass für alle $a, b, c, d \in G$ der Kommutator $[[a,b],[c,d]]$ verschwindet, also $G'' = \{e\}$ ist, was nach 1.2.7 gerade (ii) liefert.
Andererseits folgt aus dieser Bedingung auch, dass $[a,[b,[c,d]]]^{-2} = e$ ist, und, da G keine Elemente der Ordnung 2 enthält, eben auch $[a,[b,[c,d]]] = e$ ist, was nach 1.2.12 die Nilpotenz von höchstens Klasse 3 ergibt. #

[15] Beim Beweis in Heineken [3] muss wieder beachtet werden, dass die Kommutatoren dort anders definiert sind (der Kommutator von $a, b \in G$ ist dort gleich $[a^{-1}, b^{-1}]$).

Dieser Satz kann als „Zwischenglied“ zu den beiden oben angeführten Sätzen von Heineken verstanden werden.
Für uns bedeutet das Resultat in 2.5.30 aber insbesondere, dass die gemäß 2.5.21 gegebene Gruppe im Fall $p \neq 2$ höchstens von Klasse 3 sein wird, aber bevor wir diese Aussage in Worte fassen, soll eine Aussage hergeleitet werden, die uns eine noch präzisere Formulierung erlaubt.

2.5.31 Satz Sei G eine nilpotente Gruppe von höchstens Klasse 2, dann sind alle Zentralisatoren von G Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe.

Beweis: Nach der Definition der Klasse in 1.2.12 ist $G' \preceq Z(G)$, also auch in jedem Zentralisator gelegen. Aussage 2.3.64 liefert nun die Behauptung. #

Nilpotenz von höchstens Klasse 2 ist also hinreichend dafür, dass alle Zentralisatoren Normalteiler sind. Bei dem zur Zeit betrachteten Fall einer p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2 gibt es allerdings gerade mindestens einen Zentralisator, der kein Normalteiler ist; somit kann eine solche Gruppe nicht nilpotent der Klassen 1 oder 2 sein, und wir erhalten:

2.5.32 Satz Sei $p \neq 2$ eine Primzahl und G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, bei der ein nicht normaler Zentralisator des Index p^2 existiert, dann gelten:
(i) G ist nilpotent von Klasse 3. (ii) G ist auflösbar von Stufe 2.

Beweis: Nach 2.5.21(i) erfüllt G für alle $x, y, z \in G$ die Bedingung $[x, [x, [y, z]]] = e$. Es greift 2.5.30 und liefert zusammen mit den vor dem Satz gemachten Überlegungen die These. #

Damit ist G übrigens für $p \geq 5$ gemäß 2.5.6 eine reguläre Gruppe.

2.5.33 Beispiel Auch dieser Fall soll an einem Beispiel illustriert werden, an einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_9 zur Primzahl $p = 3$. Und da das betrachtete Beispiel diesmal sogar $p^4 = 81$ Gruppenelemente umfasst, greifen wir wieder auf Maple V.4 zurück. Die Gruppe G sei also $G := \langle (1,2,3,4,5,6,7,8,9), (1,4,7) \rangle$, übrigens eine 3-Sylowgruppe von S_9, wie sie in Kapitel 2.4 ausführlichst erörtert wurde:

```
> with(group): grouporder(permgroup(9, {[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}));
```

81

Zu Beginn betrachten wir wieder Kommutatorgruppe von G:

```
> derived(permgroup(9, {[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}));
```

permgroup(9, { [[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]]})

```
> grouporder(permgroup(9,{[[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]]}));
```

9

Es ist $G' = \langle (1,4,7)(2,8,5)\ ,\ (2,5,8)(3,9,6) \rangle$ mit $|G'| = 9 = p^2$, also wieder Zentralisatorschranke p^2 (vgl. 2.5.4). Es soll nun geprüft werden, ob Zentralisatoren des Index p^2 vorliegen, die keine Normalteiler sind:

```
> centralizer(permgroup(9, {[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}),
[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]]);
```

permgroup(9, {[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]]})

```
> grouporder(permgroup(9,{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]]}));
```

$$9$$

```
> pg := permgroup(9, {[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}):
sg := permgroup(9,{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]]}):
isnormal(pg,sg);
```

$$\mathit{false}$$

Das Zentralisator $C_G(\ (1,2,3,4,5,6,7,8,9)\ ) = \langle(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\rangle$ ist kein Normalteiler und vom Index p^2. Berechnen wir noch den Normalisator $N_G(\ \langle(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\rangle\ )$, dessen Ordnung sich zu p^3 ergibt:

```
> pg := permgroup(9, {[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}):
sg := permgroup(9,{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]]}):
normalizer(pg,sg);
```

$$\text{permgroup}(9, \{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]], [[2, 8, 5], [3, 6, 9]]\})$$

```
> grouporder(permgroup(9,{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]],
[[2, 8, 5], [3, 6, 9]]}));
```

$$27$$

Nun betrachten wir wieder das Zentrum von G:

```
> center(permgroup(9,{[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[ 1,4,7]]}));
```

$$\text{permgroup}(9, \{[[1, 4, 7], [2, 5, 8], [3, 6, 9]]\})$$

```
> grouporder(permgroup(9,{[[1, 4, 7], [2, 5, 8], [3, 6, 9]]}));
```

$$3$$

Es ist $Z(G) = \langle\ (1,4,7)(2,5,8)(3,6,9)\ \rangle$ mit $|Z(G)| = p$. Da G' offensichtlich nicht in $Z(G)$ gelegen ist, muss G nilpotent von mindestens Klasse 3 sein; da G' abelsch ist, ist allerdings $G'' = \{e\}$ und somit G auflösbar von Stufe 2.
Wir prüfen, ob $Z(G)$ eine Untergruppe von G' ist und berechnen anschließend die absteigende Zentralreihe von G:

```
> pg := permgroup(9,{[[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]]}):
sg := permgroup(9,{[[1, 4, 7], [2, 5, 8], [3, 6, 9]]}):
issubgroup(sg,pg);
```

$$\mathit{true}$$

```
> LCS(permgroup(9,{[[1,2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,4,7]]}));
```

$$\begin{aligned}&[\text{permgroup}(9, \{[[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]], [[1, 4, 7]]\}),\\ &\quad \text{permgroup}(9, \{\,[[1, 4, 7], [2, 8, 5]], [[2, 5, 8], [3, 9, 6]]\}),\\ &\quad \text{permgroup}(9, \{\,[[1, 4, 7], [2, 5, 8], [3, 6, 9]]\}), \text{permgroup}(9, \{[]\})]\end{aligned}$$

Es ist $\mathcal{K}_3(G) = Z(G)$ und somit $\mathcal{K}_4(G) = \{e\}$, womit die Zentralreihe nach 3 Schritten endet, also ganz in Übereinstimmung mit 2.5.32 Nilpotenz der Klasse 3 vorliegt.

Fassen wir kurz zusammen: Hat die p-Gruppe G die Zentralisatorschranke p^2, so sind prinzipiell zwei Möglichkeiten zu unterscheiden: Sind alle Zentralisatoren gleichzeitig Normalteiler, so ist G nilpotent von Klasse 2 und auflösbar der Stufe 2. Letzteres ergibt sich auch im anderen Fall, wenn nämlich ein Zentralisator existiert, der kein Normalteiler ist, hier allerdings unter der Einschränkung, dass $p \neq 2$ ist; in diesem Fall ist G nilpotent von Stufe 3. Aber gerade diese Einschränkung im zweiten Fall auf Primzahlen ungleich 2 ist ein wenig „störend", so dass dieser Fall nochmals gesondert betrachtet werden muss.
Zuvor sollen aber der Vollständigkeit halber auch alle wichtigen Faktorisierungs- und Potenzierungsregeln im Falle der Nilpotenz von Klasse 3 angegeben werden, ähnlich wie dies schon bei Nilpotenz der Klasse 4 (in den zahlreichen vorherigen Sätzen) und Nilpotenz der Klasse 2 (in Korollar 2.3.50) geschah, schließlich handelt es sich ja bei den momentan betrachteten Gruppen um ebensolche!

2.5.34 Lemma Sei die Gruppe G nilpotent von Klasse 3, dann gelten:
(i) Für alle $a, b, c, d \in G$ ist $[a, [b, c]] \in Z(G)$ und $[a, [b, [c, d]]] = e$.
(ii) Für alle $a, b, c, d \in G$ ist $[\ ab\ , [c, d]] = [a, [c, d]] \cdot [b, [c, d]]$.
(iii) Für alle $a, u, v, x, y \in G$ ist $[a,\ [u, v] \cdot [x, y]\ ] = [a, [u, v]] \cdot [a, [x, y]]$.
(iv) Für alle $a, b, c, d \in G$ ist $[a, [\ bc\ , d]] = [a, [b, d]] \cdot [a, [c, d]]$.
(v) Für alle $a, b, c, d \in G$ ist $[a, [b,\ cd\ ]] = [a, [b, c]] \cdot [a, [b, d]]$.
(vi) Für alle $a, b, c \in G$ und alle $z \in \mathbb{Z}$ ist $[a^z, [b, c]] = [a, [b, c]]^z = [a, [b, c]^z]$.
Insbesondere ist also $[a, [b, c]]^{-1} = [a,\ [c, b]\ ]$.
(vii) Für alle $a, b, c \in G$ und $z \in \mathbb{Z}$ ist $[a, [b^z, c]] = [a, [b, c]]^z = [a, [b, c^z]]$.
(viii) Für alle $a, b, c \in G$ ist $[c, [b, a]] \cdot [a, [c, b]] \cdot [b, [a, c]] = e$.
(ix) Für alle $a, b \in G$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist $[a, b^k] = [a, b]^k [b, [a, b]]^{\frac{(k-1)k}{2}}$.
(x) G ist auflösbar von Stufe 2.

Beweis: (i) folgt direkt aus der Definition der Klasse 3 in 1.2.12, (ii) bis (v) resultieren aus 2.3.49 unter Berücksichtigung, dass Kommutatoren der Länge 4 verschwinden und Kommutatoren der Länge 3 beliebig vertauschbar sind. (vi) ist eine direkte Konsequenz aus 2.3.62.
(vii) Bewiesen wird nur die erste Gleichheit, der Rest kann völlig analog gezeigt werden. Für $z = 0$ ist die Aussage trivial. Sei nun $z \in \mathbb{N}$. Dann liefert mehrfache Anwendung von (iv) die Gleichung $[a, [b^z, c]] = [a, [b \cdot b^{z-1}, c]] = [a, [b, c]] \cdot [a, [b^{z-1}, c]] = ... = [a, [b, c]]^z$, womit die Behauptung für alle natürlichen Zahlen gezeigt ist. Zudem ist
$e = [a, [b^z b^{-z}, c]] = [a, [b, c]]^z [a, [b^{-z}, c]]$, also $[a, [b^{-z}, c]] = ([a, [b, c]]^z)^{-1} = [a, [b, c]]^{-z}$.
(viii) ist die Wittsche Ungleichung in Fassung 2.5.18(ii) unter Berücksichtigung von (vi), (vii) und der Tatsache, dass Kommutatoren der Länge 4 verschwinden.
(ix) Beweisen wir zuerst die Aussage für $k \in \mathbb{N}_0$ per Induktion! Für $k = 0$ oder $k = 1$ ist die Aussage trivial. Sei die Aussage also für alle $j \leq k$ gezeigt, betrachte $j = k + 1$: Dann liefert 2.3.49, dass
$[a, b^{k+1}] = [a, b \cdot b^k] = [a, b] \underbrace{[b, [a, b^k]]}_{=[b,[a,b]]^k \in Z(G)\ nach\ (i),\ (vii)} [a, b^k] = [a, b][a, b]^k [b, [a, b]]^{\frac{(k-1)k}{2}} [b, [a, b]]^k =$
$[a, b]^{k+1} [b, [a, b]]^{\frac{k(k+1)}{2}}$ ist. Nun rechnet man $[a, b^{-1}] = [b, a][[a, b], b^{-1}] = [a, b]^{-1}[b, [a, b]]$ nach, womit die Aussage (ix) auch für $k = -1$ gilt. Allgemein ist
$[a, b^{-k}] = [a, b^{-1}]^k [b^{-1}, [a, b^{-1}]]^{\frac{(k-1)k}{2}} = [a, b]^{-k} [b, [a, b]]^k [b, [a, b]]^{\frac{(k-1)k}{2}} = [a, b]^{-k} [b, [a, b]]^{\frac{(-k-1)(-k)}{2}}$.
(x) folgt direkt aus (viii), wenn man eines der Elemente durch einen beliebigen Kommutator ersetzt. #

Nach 2.5.31 ist Nilpotenz der Klasse 2 hinreichend dafür, dass alle Zentralisatoren Normalteiler sind. Wenn wir uns nun ein bißchen zurückerinnern, dann fällt auf, dass bei den bisher behandelten Fällen (also prime Zentralisatorschranke oder Primquadrat) aus der Bedingung „Alle Zentralisatoren sind Normalteiler“ stets Nilpotenz der Klasse 2 folgte. Dies ist kein Zufall, denn es gilt auch meistens die Umkehrung von 2.5.31. Um dies zu zeigen, benötigen wir den Satz von Levi [5], der um eine Aussage zur Auflösbarkeit ergänzt wurde[16]:

2.5.35 Satz Sei $[x,[x,y]] = e$ für alle $x, y \in G$ (2-Engelbedingung), dann ist G nilpotent von höchstens Klasse 3.
Enthält G keine Elemente der Ordnung 3, so hat G sogar höchstens die Klasse 2.
Stets ist G auflösbar von Stufe 2.

Sind nun alle Zentralisatoren Normalteiler, so ist für beliebige $x, y \in G$ stets $[x, y] \in C_G(x)$, da $x, x^{-1} \in C_G(x)$ sind. Ergo resultiert $[x,[x,y]] = e$ und Levi's Satz 2.5.35 ergibt (ausgenommen, es existieren Elemente von Ordnung 3) Nilpotenz von Klasse 2.

Blicken wir nun zurück zu den p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2, bei denen nicht alle Zentralisatoren auch gleichzeitig Normalteiler sind. Bei jenen ist uns nämlich bisher noch keine Aussage für den Fall $p = 2$ möglich. Wir wissen nur, dass G als 2-Gruppe in jedem Fall nilpotent ist, und zwar von mindestens Klasse 3, was eine direkte Konsequenz aus 2.5.31 ist.
Sei G wieder eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, wobei ein nicht normaler Zentralisator des Index p^2 existiert. In völliger Analogie zum Vorgehen bei der primen Zentralisatorschranke (vgl. Kapitel 2.3) wählen wir uns ein Element $t \in G$ so aus, dass der Zentralisator $C_G(t)$ vom Index p^2 und kein Normalteiler ist. Nun bilden wir $D(t) := \bigcap_{g\in G} gC_G(t)g^{-1}$, welches auf jeden Fall echt kleiner sein muss als $C_G(t)$, also mindestens vom Index p^3 ist.
Andererseits muss nach 2.1.7 die Faktorgruppe $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} sein, da wir eine p-Gruppe vorliegen haben. Nach den Ergebnissen aus 2.4.4 ist somit die Ordnung von $G/D(t)$ auf jeden Fall schon einmal beschränkt durch p^{p+1}. Doch diese Aussage lässt sich noch präzisieren, denn nach 2.1.12 wissen wir, dass die Faktorgruppe $G/D(t)$ nicht abelsch sein kann.
Die nichtabelschen Untergruppen einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} kennen wir jedoch sehr genau, man beachte die Sätze 2.4.15 und 2.4.16. Und da die von uns betrachteten Untergruppen nur Zentralisatorschranke p oder p^2 haben dürfen, kann die Ordnung von $G/D(t)$ den Wert p^4 nicht übersteigen.
Für $p > 2$ wissen wir, dass G nilpotent von Klasse 3 ist. Lemma 2.1.13 hat nun zur Konsequenz, dass $G/D(t)$ für $p > 2$ von Klasse 2 sein muss, da $D(t)$ definitionsgemäß das Zentrum enthält; dies ist aber nur möglich, wenn $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} vom Typ K_3 oder M_3 (vgl. zur Definition die Sätze 2.4.15 und 2.4.16) ist, was wiederum bedeutet, dass $|G/D(t)| = p^3$ ist.
Im Fall $p = 2$ ergibt sich letzteres Resultat aber ohnehin zwangsläufig, da eine 2-Sylowgruppe von S_4 die Ordnung 2^3 hat.
Somit können wir folgenden Satz formulieren, der die p-Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2 umfassend beschreibt:

[16] Beim Beweis in Levi [5] muss wieder beachtet werden, dass die Kommutatoren dort anders definiert sind (der Kommutator von $a, b \in G$ ist dort gleich $[a^{-1}, b^{-1}]$).

2.5.36 Satz Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann ist G auflösbar von Stufe 2 und es gilt:
(i) Sind alle Zentralisatoren des Index p^2 Normalteiler, so ist G nilpotent von Klasse 2.
(ii) Existieren Elemente $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = p^2$, $C_G(t)$ aber kein Normalteiler in G, so ist G nilpotent von Klasse 3.
(iii) Im Fall (ii) gilt für die Faktorgruppe $G/D(t)$:

- Ist $p > 2$, so ist $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} vom Typ K_3 oder M_3 (vgl. zur Definition die Sätze 2.4.15 und 2.4.16).
- Ist $p = 2$, so ist $G/D(t)$ isomorph zur Diedergruppe D_4.

In beiden Fällen ist also insbesondere $|G/D(t)| = p^3$ und $G/D(t)$ hat Klasse 2, sowie Zentralisatorschranke p.

Beweis: (i) wurde bereits in 2.5.10 gezeigt.
(ii), (iii) Der Fall $p > 2$ wurde in 2.5.32 und den vor diesem Satz gemachten Überlegungen erörtert.
Nach 2.1.7 ist $G/D(t)$ im Fall $p = 2$ isomorph zu einer 2-Sylowgruppe P von S_4, die sich durch $P = \langle (b, d), (a, b, c, d) \rangle$ erzeugen lassen.
Da $(b, d)(d, c, b, a) = (a, b)(c, d) = (a, b, c, d)(b, d)$ gilt, resultiert, dass $G/D(t)$ isomorph zu $D_4 = \langle s, d \rangle$ mit $ord(d) = 4$, $ord(s) = 2$ und $ds = sd^{-1}$ ist. In 2.3.58 wurde D_4 ausführlichst behandelt, so dass nun alle Behauptungen aus (iii) bewiesen sind.
Insbesondere ist nun $G/D(t)$ für $t \in G$, gewählt wie oben, nilpotent von Klasse 2, für alle übrigen $g \in G$ ist $G/D(g)$ sogar abelsch. Auf diese Weise ist für alle $x \in G$ stets
$\{D(x)\} = \mathcal{K}_3(G/D(x)) = \mathcal{K}_3(G)D(x)/D(x)$, insbesondere $\mathcal{K}_3(G) \preceq D(x) \preceq C_G(x)$ und ergo $\mathcal{K}_3(G) \preceq Z(G)$. Damit verschwindet $\mathcal{K}_4(G)$ und G ist nilpotent von Klasse 3. #

Demonstrieren wir die somit gefundenen Eigenschaften, die nun auch den Fall $p = 2$ beinhalten, an der Diedergruppe D_8 (Verknüpfungstafel siehe nächste Seite):

2.5.37 Beispiel Betrachten wir die Diedergruppe $G = D_8$ zur Primzahl $p = 2$.
Da $s(sd)s^{-1} = sd^7 \notin C_G(sd)$ ist, ist der Zentralisator $C_G(sd)$, welcher Index p^2 hat, kein Normalteiler in G.
Der Normalisator von $C_G(sd)$ umfasst die geraden Potenzen von d^k und die ungeraden von sd^k und hat somit Index 2, d.h. $C_G(sd)$ hat zwei verschiedene Konjugierte; neben $C_G(sd)$ selbst ist dies noch $C_G(sd^3)$. Also ist $D(sd) = \{e, d^4\}$, was augenscheinlich abelsch ist, und $G/D(sd)$ ist offensichtlich isomorph zu D_4, also nicht abelsch.
Die Kommutatorgruppe ist $D_8' = \{e, d^2, d^4, d^6\}$ und damit nicht im Zentrum $Z(G) = \{e, d^4\}$ gelegen, womit D_8 nilpotent der Klasse 3 und auflösbar der Stufe 2 ist. Das Zentrum stimmt hier also überein mit $D(t)$.
D_8 ist übrigens eine konkrete Umsetzung des eingangs angeführten Beispiels 2.5.4.

In Gruppen von Nilpotenzklasse 3 gelten die in 2.5.34 zusammengestellten Regeln für das Rechnen mit Kommutatoren, doch in unserem Fall lassen sich diese Regeln noch verschärfen und daraus wiederum einige äußerst interessante Folgerungen für G ableiten.

	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	I
e	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	1
d	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	2
d^2	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	2
d^3	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	2
d^4	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	1
d^5	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	2
d^6	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	2
d^7	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	2
s	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	2^2
sd	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	2^2
sd^2	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	d^5	2^2
sd^3	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	d^4	2^2
sd^4	sd^4	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	d^3	2^2
sd^5	sd^5	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	d^2	2^2
sd^6	sd^6	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	d	2^2
sd^7	sd^7	s	sd	sd^2	sd^3	sd^4	sd^5	sd^6	d	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6	d^7	e	2^2

Abbildung 2.6: Verknüpfungstafel zu D_8

2.5.38 Lemma Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann gilt für alle $x, y, z \in G$:
(i) $[x^p, [y, z]] = [x, [y^p, z]] = [x, [y, z^p]] = [x, [y, z]]^p = [x, [y, z]^p] = e$.
(ii) $[x^{p^2}, y] = e$. (iii) $[x, y^p] = [x, y]^p$. (iv) $[x, y]^{p^2} = [x^p, y^p] = e$.

Beweis: (i) Sei $t \in G$ beliebig gewählt. Ist $C_G(t) \trianglelefteq G$, so ist nach 1.2.5 gerade $G' \preceq C_G(t)$. Ist $C_G(t)$ dagegen kein Normalteiler, so ist $G/D(t)$ nicht abelsch von Ordnung p^3 mit einer Kommutatorgruppe der Ordnung p.
Somit existiert ein $x \in G$ mit $G'D(t)/D(t) = (G/D(t))' = \langle xD(t) \rangle = \langle x, D(t) \rangle / D(t)$, wobei für alle $y \in \langle x, D(t) \rangle$ gilt, dass $y^p \in D(t)$ ist. Also ergibt sich auch für jedes $\phi \in G' \preceq \langle x, D(t) \rangle$, dass $\phi^p \in D(t) \preceq C_G(t)$ ist. Also ist für alle $\phi \in G'$ und $x \in G$ stets $\phi^p \in Z(G)$ und somit $[x, \phi^p] = e$. Dies hat die letzte Gleichheit in (i) zur Folge, der Rest ist eine Konsequenz aus 2.5.34(vi) und (vii).
(ii) Nach 2.5.36 ist für alle $y \in G$ stets $G/D(y)$ vom Exponenten höchstens p^2; man erhält somit, dass für alle $x, y \in G$ stets $x^{p^2} \in D(y)$ gilt, also $x^{p^2} \in Z(G)$. Dies ergibt (ii).
(iii) folgt aus (i) und 2.5.34(ix).
(iv) folgt aus (ii) und (iii). #

2.5.39 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann gelten:
(i) $(G')^p \preceq Z(G)$.
(ii) $\mathcal{K}_3(G)$ hat einen Exponenten von höchstens p.
(iii) $G/Z(G)$ hat einen Exponenten von höchstens p^2.
(iv) G' hat einen Exponenten von höchstens p^2.
(v) Die Frattinigruppe $\Phi(G)$ ist abelsch.

Beweis: (i) folgt aus der letzten Gleichheit in 2.5.38(i).
(ii) folgt aus der vorletzten Gleichheit in 2.5.38(i).
(iii) Aussage 2.5.38(ii) besagt, dass für alle $x \in G$ stets $x^{p^2} \in Z(G)$ ist.
(iv) folgt direkt aus 2.5.38(iv).
(v) Nach 2.5.38(i) gilt stets $[x^p, [y, z]] = e$, also sind alle Elemente aus G^p mit allen aus G' vertauschbar. G' selber ist abelsch nach 2.5.36, G^p ist abelsch nach 2.5.38(iv). Somit liefert 2.5.1(i) die Behauptung. #

Im Folgenden zielen unsere Überlegungen auf die Struktur von $G/Z(G)$ einerseits und die von G' andererseits. Bevor wir detailliertere Überlegungen anstellen, erst eine Hilfsaussage:

2.5.40 Lemma Sei G eine Gruppe, seien $N_1, ..., N_n$ unterschiedliche Normalteiler in G, dann gilt: $G/\bigcap_{i=1}^n N_i$ ist isomorph zu einer Untergruppe von $\bigotimes_{i=1}^n G/N_i$.

Beweis: Es ist $\varphi(g) := \begin{pmatrix} gN_1 \\ \vdots \\ gN_n \end{pmatrix}$ für alle $g \in G$ ein Homomorphismus zwischen G und $\bigotimes_{i=1}^n G/N_i$. Der Kern dieses Homomorphismus berechnet sich zu
$Kern(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_n \end{pmatrix}\} = \{g \in G | g \in N_1 \wedge ... \wedge g \in N_n\} = \bigcap_{i=1}^n N_i$. Somit liefert 1.3.1 die Behauptung. #

2.5.41 Lemma Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Des Weiteren existieren Zentralisatoren vom Index p^2, die keine Normalteiler in G seien. Dann gilt:
Für alle $g, h \in G$ mit $|G/D(g)| = p^3 = |G/D(h)|$ und $D(g) \neq D(h)$ ist $G/(D(g) \cap D(h))$ isomorph zu einer echten Untergruppe von $G/D(g) \otimes G/D(h)$ mit Zentralisatorschranke p.

Beweis: Es seien $g, h \in G$ Elemente mit $|G/D(g)| = p^3 = |G/D(h)|$ und $D(g) \neq D(h)$. Dann ist $D := D(g) \cap D(h)$ eine echte Untergruppe in $D(g)$ und $D(h)$, und nach Lemma 2.5.40 ist G/D isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2 := G/D(g) \otimes G/D(h)$. Die Struktur von $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2$ ist bekannt, beide Faktoren sind von Ordnung p^3, Zentralisatorschranke p und Nilpotenzklasse 2, womit $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2$ von Ordnung p^6, Zentralisatorschranke p^2 und Nilpotenzklasse 2 ist, zudem die Kommutatorgruppe $\tilde{G}_1' \otimes \tilde{G}_2'$ die Ordnung p^2 besitzt. $\tilde{G}_1$ und $\tilde{G}_2$ sind von minimal zwei Elementen erzeugbar, sei also $\tilde{G}_1 \otimes \tilde{G}_2$ isomorph zu

$$G_1 \otimes G_2 := \langle x_1, x_2 \rangle \otimes \langle y_1, y_2 \rangle := \langle r_1, r_2, D \rangle / D \otimes \langle s_1, s_2, D \rangle / D.$$

Da $G/D \cong U := U_1 \otimes U_2 \preceq G_1 \otimes G_2$ nilpotent von Klasse 2, also insbesondere nicht abelsch und von einer Zentralisatorschranke von mindestens p ist, muss wenigstens einer der Faktoren

U_i mit G_i übereinstimmen, sei dies im Folgenden o.B.d.A. $U_1 = G_1$.
Angenommen, es wäre $U = G_1 \otimes G_2$. Es ist dann $G = \langle r_1, r_2, s_1, s_2, D\rangle$, sowie $G_1' = \langle [x_1, x_2]\rangle$ und $G_2' = \langle [y_1, y_2]\rangle$, jeweils von Ordnung p. Für $1 \leq i, j \leq 2$ ist $[x_i, y_j] = [\binom{x_i}{e}, \binom{e}{y_j}] = e$, womit diese Elemente stets vertauschbar sind. Da in U alle Zentralisatoren Normalteiler sind, ist außerdem für alle $u \in U$ stets $U' \preceq C_U(u)$. Somit ist $C_U(x_i y_j) \succeq \langle x_i, y_j, U'\rangle$, wobei Letzteres vom Index p^2 in U ist. Andererseits folgt mit $1 \leq k \neq i, l \neq j \leq 2$ aus

$$[x_i y_j, x_k^m y_l^n] = [x_i, x_k]^m [x_i, y_l]^n [y_j, x_k]^m [y_j, y_l]^n = [x_i, x_k]^m [y_j, y_l]^n$$

(Nilpotenzklasse 2), dass $x_i y_j$ genau p^2 verschiedene Konjugierte hat, sein Zentralisator also vom Index p^2 in U ist (vgl. 2.1.1). Deshalb resultiert $C_U(x_i y_j) = \langle x_i, y_j, U'\rangle \cong \langle r_i, s_j, G'D\rangle / D$. Somit ist $C_G(r_i s_j) \preceq \langle r_i, s_j, G'D\rangle$ vom Index höchstens p^2, was wiederum Gleichheit erzwingt. Analog erhält man $C_G(r_i r_k s_j) = \langle r_i r_k, s_j, G'D\rangle$ und $C_G(r_i s_j s_l) = \langle r_i, s_j s_l, G'D\rangle$.
Es ist nun $C_G(r_i r_k s_j) \cap C_G(r_k s_j) \preceq C_G(r_i)$ (denn $r_i = r_i r_k s_j (r_k s_j)^{-1}$), also in jedem Fall $G'D \preceq C_G(r_i)$, und auf gleiche Weise bekommt man für beliebiges $d \in D(t)$ sogar stets $G'D \preceq C_G(r_i d)$ und $G'D \preceq C_G(s_j d)$, womit man für alle $x \in G$ zeigt, dass $G'D \preceq C_G(x)$ ist, weshalb Nilpotenz von Klasse 2 für G folgen würde, was 2.5.36 widerspräche.
Somit ist G/D stets isomorph zu einer echten Untergruppe von $G_1 \otimes G_2$ der Form $G_1 \otimes U_2$, wobei U_2 eine abelsche Untergruppe von G_2 ist. Ergo verfügt G/D über die Zentralisatorschranke p. #

Damit ist der Grundstein für die Untersuchung von $G/Z(G)$ gelegt. Nachdem uns nun bekannt ist, dass für unterschiedliche $D(g)$, $D(h)$ vom Index p^3 die Faktorgruppe $G/(D(g) \cap D(h))$ die Zentralisatorschranke p hat, soll dieses Resultat in einem ersten Schritt auf beliebige Schnitte von paarweise verschiedenen $D(g_1)$, ..., $D(g_k)$ des Index p^3, schließlich auf $Z(G) = \bigcap_{g \in G} D(g)$ ausgedehnt werden.

2.5.42 Lemma Sei G gegeben wie in 2.5.41. Dann gilt:
Für alle $g_1, ..., g_k \in G$ mit $|G/D(g_i)| = p^3$, $1 \leq i \leq k$, und paarweise versch. $D(g_1), ..., D(g_k)$ ist $G/\bigcap_{i=1}^k D(g_i)$ isomorph zu einer echten Untergruppe von $\bigotimes_{i=1}^k G/D(h)$ mit Zentralisatorschranke p.

Beweis: Der Beweis wird per Induktion geführt und verläuft in völliger Analogie zu dem von 2.5.41, welches auch den Induktionsanfang für $k = 2$ liefert.
Sei die Behauptung also für alle $l \leq k$ gezeigt, betrachte nun $l = k + 1$:
Mit $D := \bigcap_{i=1}^{k+1} D(g_i)$ und 2.5.40 ist $G/D = G/(\bigcap_{i=1}^k D(g_i) \cap D(g_{k+1}))$ isomorph zu einer Untergruppe von $X := G_1/D \otimes A/D \otimes G_{k+1}/D$, wobei erster und letzter Faktor wieder von zwei Elementen erzeugt, nilpotent von Klasse 2, von Zentralisatorschranke p und Ordnung p^3 ist, A/D dagegen abelsch. Untergruppen von X mit Zentralisatorschranke p^2 müssten die Faktoren G_1 und G_{k+1} vollständig enthalten, beschränken wir uns also auf die Untersuchung von $G/D \cong X =: \langle r_1, r_2, D\rangle / D \otimes A/D \otimes \langle s_1, s_2, D\rangle / D$, was erneut zum Widerspruch gebracht werden soll.
Es ist nun $G = \langle r_1, r_2, s_1, s_2, A\rangle$ und $A/D \preceq Z(G/D)$. Mit $1 \leq k \neq i, l \neq j \leq 2$ erhält man nun für beliebiges $a \in A$ wieder völlig analog zu 2.5.41, dass $C_G(r_i s_j a) = \langle r_i, s_j, G'D, A\rangle$, $C_G(r_i r_k s_j a) = \langle r_i r_k, s_j, G'D, A\rangle$ und $C_G(r_i s_j s_l a) = \langle r_i, s_j s_l, G'D, A\rangle$ ist und somit wieder $G'D \preceq C_G(r_i a)$ und $G'D \preceq C_G(s_j a)$ gelten muss, also erneut für alle $x \in G$ stets $G'D \preceq C_G(x)$ ist, womit für G Nilpotenz von Klasse 2 die Konsequenz wäre, was 2.5.36 widerspräche.
Also verbleibt für G/D nur die Zentralisatorschranke p und es folgt die Behauptung. #

Im betrachteten Fall ergibt sich somit, dass für alle möglichen, paarweise verschiedenen Durchschnitte $D(g_1), ..., D(g_n)$ mit Faktorgruppe der Ordnung p^3 gilt, dass $G/\bigcap_{i=1}^{n} D(g_i)$ die Zentralisatorschranke p besitzt.
Machen wir uns nun Gedanken über das Zentrum $Z(G)$, welches als Durchschnitt aller Zentralisatoren gebildet werden kann. Die Frage ist nun, ob bei einer derartigen Darstellung des Zentrums tatsächlich alle Zentralisatoren vonnöten sind; dazu folgende Aussagen:

2.5.43 Lemma Sei G eine Gruppe, seien $x, y \in G$, dann ist $C_G(x) \cap C_G(y) = C_G(xy) \cap C_G(y)$.

Beweis: Mit $b = a^{-1} \cdot (ab)$ ist stets $C_G(a) \cap C_G(ab) \preceq C_G(b)$ und somit für obige $x, y \in G$

$$C_G(x) \cap C_G(y) \succeq (C_G(xy) \cap C_G(y)) \cap C_G(y) = C_G(xy) \cap C_G(y) \succeq (C_G(x) \cap C_G(y)) \cap C_G(y),$$

womit die Behauptung folgt. #

2.5.44 Lemma Sei p eine Primzahl. In einer p-Gruppe G mit Zentralisatorschranke p^2 gilt:
(i) Sind alle Zentralisatoren des Index p^2 Normalteiler in G, so ist $Z(G) = \bigcap_{g \in M} C_G(g)$ mit $M := \{g \in G | C_G(g) \text{ vom Index } p^2\}$.
(ii) Gibt es nichtnormale Zentralisatoren des Index p^2, und sei $M := \{g \in G | C_G(g) \not\trianglelefteq G\}$ (solche Zentralisatoren haben Index p^2), so ist $Z(G) = \bigcap_{g \in M} C_G(g) = \bigcap_{g \in M} D(g)$.

Beweis: (i) Sei $C_G(x)$ ein beliebiger Zentralisator des Index p, sei $C_G(y)$ ein solcher des Index p^2. Ist $C_G(y) \preceq C_G(x)$, so ist $C_G(x) \cap C_G(y) = C_G(y)$, also kann bei der Bildung des Zentrums per Durchschnitt auf $C_G(x)$ verzichtet werden.
Angenommen, $C_G(y) \not\preceq C_G(x)$, dann betrachtet man $C_G(xy)$. Wäre $C_G(xy) \preceq C_G(x)$, so wäre wegen $y = x^{-1} \cdot (xy)$ auch $C_G(xy) = C_G(xy) \cap C_G(x) \preceq C_G(y)$, wobei die Zentralisatorschranke p^2 sogar Gleichheit erzwingen würde; damit wäre aber analog $C_G(y) \preceq C_G(x)$, was ein Widerspruch wäre. Somit gilt im betrachteten Fall: $C_G(xy) \not\preceq C_G(x)$.
Angenommen, $|G : C_G(xy)| = p$, so ergäben 1.3.2 und analoge Überlegung wie eben, dass $C_G(y) = C_G(x) \cap C_G(xy)$ wäre, was nicht sein darf, denn sonst wäre $C_G(y)$ eine Untergruppe von $C_G(x)$. Ergo erhält man $|G : C_G(xy)| = p^2$ (die Möglichkeit $|G : C_G(xy)| = 1$ ist leicht zu widerlegen) und man führt den Fall $C_G(xy) \equiv C_G(y)$ analog oben zum Widerspruch.
Somit lässt sich nach Lemma 2.5.43 der Durchschnitt $C_G(x) \cap C_G(y)$ durch den Schnitt zweier unterschiedlicher Zentralisatoren des Index p^2, nämlich $C_G(xy)$ und $C_G(y)$, ersetzen.
(ii) Im Folgenden sei $C_G(x)$ ein normaler Zentralisator, $C_G(y)$ dagegen ein nichtnormaler Zentralisator (des Index p^2).
Analog eben beschränken wir uns auf den Fall $C_G(y) \not\preceq C_G(x)$. Dann kann $C_G(xy)$ kein Normalteiler sein (sonst wäre $G' \preceq C_G(x) \cap C_G(xy) \preceq C_G(y) \not\trianglelefteq G$), ist also vom Index p^2. Mit 2.5.43 erhält man wieder $C_G(x) \cap C_G(y) = C_G(xy) \cap C_G(y)$, womit auf normale Zentralisatoren bei der Bildung des Zentrums per Durchschnitt verzichtet werden kann.
Schließlich ist $Z(G) \preceq D(g)$ für alle $g \in G$, wodurch $Z(G) = \bigcap_{g \in M} C_G(g) = \bigcap_{g \in M} D(g)$ resultiert. #

Die Erkenntnisse aus 2.5.44(ii) lassen sich nun mit denen aus 2.5.42 kombinieren:
Es gelten wieder die Voraussetzungen von 2.5.41. Das Zentrum $Z(G)$ ist der Durchschnitt aller nichtnormalen Zentralisatoren bzw. der zugehörigen Untergruppen $D(g)$ mit Faktorgruppe der Ordnung p^3. Seien $D(g_1), ..., D(g_n)$ alle möglichen, paarweise verschiedenen Durchschnitte

mit Faktorgruppe der Ordnung p^3, so ist $G/Z(G) = G/(\bigcap_{i=1}^{n} D(g_i))$, welches die Zentralisatorschranke p besitzt. Somit erhält man, unter Berücksichtigung der bei den Beweisen von 2.5.41 und 2.5.42 beobachteten Struktur der Faktorgruppe G/D:

2.5.45 Satz Sei G gegeben wie in 2.5.41. Dann gilt:
Die Faktorgruppe $G/Z(G)$ verfügt über die Zentralisatorschranke p.
Dabei ist $G/Z(G) \cong \langle x_1, x_2, Z(G)\rangle/Z(G) \otimes A/Z(G)$, wobei der erste Faktor von Ordnung p^3, Zentralisatorschranke p und Nilpotenzklasse 2 ist, der zweite Faktor abelsch mit einem Exponenten von höchstens p^2.

2.5.46 Korollar Sei G gegeben wie in 2.5.45. Dann ist $\mathcal{K}_3(G) = \langle [x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]]\rangle$ vom Exponenten p und Ordnung p oder p^2.

Beweis: Da $A/Z(G)$ in $Z(G/Z(G))$ liegt, befinden sich alle Kommutatoren, deren eine Komponente aus A ist, im Zentrum von G, und mit 2.5.34(viii) erhält man, dass alle Kommutatoren der Länge 3, bei denen wenigstens eine Komponente aus A ist, verschwinden.
Da sich beliebige Elemente aus G stets in der Form $x_1^i x_2^j a$ mit geeigneten Potenzen i, j und $a \in A$ darstellen lassen, und für Kommutatoren der Länge 3 die Faktorisierungsregeln aus 2.5.34 gelten, lässt sich jeder Kommutator der Länge 3 erzeugen mit Kommutatoren der Form $[x_r, [x_s, x_t]]$ und $x_r, x_s, x_t \in \{x_1, x_2\}$, womit der erste Teil der Behauptung folgt. Den Rest liefert 2.5.39(ii). #

Damit ist das dritte Glied der absteigenden Zentralreihe von G recht genau bekannt; verbleibt nun, die Kommutatorgruppe G' detaillierter zu untersuchen. Hierbei macht es Sinn, die zwei möglichen Fälle (alle Zentralisatoren sind Normalteiler, G also nilpotent von Klasse 2, oder es gibt einen nichtnormalen Zentralisator, womit G nilpotent von Klasse 3 wäre) getrennt zu behandeln. Beginnen wir mit dem Fall, dass G nilpotent von Klasse 2 ist; wir erhalten:

2.5.47 Lemma Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 2. Dann gilt:
Ist $|G'| \geq p^3$, so ist der Exponent von G' gleich p.

Beweis: Per Widerspruch! Nehmen wir also an, die Kommutatorgruppe G' habe den Exponenten p^2. Dann existieren $a, b \in G$ derart, dass $ord([a, b]) = p^2$ ist, und da $|G'| \geq p^3$ ist, existieren weitere Elemente $u, v \in G$ so, dass $\langle [a, b]\rangle \otimes \langle [u, v]\rangle$ isomorph zu einer Untergruppe X von G' mit Ordnung mindestens p^3 ist (man beachte, dass G' abelsch ist). Nach 2.1.1 gilt nun, dass $|[a, G]| = p^2 = |[b, G]|$ ist, und die Elemente von $[a, G]$ und $[b, G]$ sind genau jene aus $\langle [a, b]\rangle$ (man berücksichtige die Potenzierungsregeln aus 2.3.50).
Für beliebige $0 \leq i \leq p^2 - 1$ und $0 \leq j \leq p - 1$ ist nun $[au, b^i v^j] = [a, b]^i [u, v]^j [a, v]^j [u, b]^i$. Da die Konjugierten von a und b bereits bekannt sind, muss gelten: $[a, v], [u, b] \in \langle [a, b]\rangle$.
Es ist $\langle [u, b]\rangle \neq \langle [a, b]\rangle$, denn sonst gäbe es für $[u, b^i v^j] = [u, b]^i [u, v]^j$ gerade p^3 verschiedene Möglichkeiten, womit u nach 2.1.1 mindestens p^3 Konjugierte hätte, was der Zentralisatorschranke p^2 widerspricht. Analoges zeigt man für $[a, v]$.
Somit lassen sich $[a, v]$ und $[u, b]$ darstellen in der Form $[a, v] = [a, b]^r$ und $[u, b] = [a, b]^s$ mit $r, s \equiv 0 \pmod p$. Damit ist $[au, b^i v^j] = ([a, b]^{s+1})^i ([a, b]^r [u, v])^j$, wobei $[a, b]^{s+1}$ ganz $\langle [a, b]\rangle$ erzeugt, und $\langle [a, b]^r [u, v]\rangle$ trivialen Schnitt mit diesem hat, d.h. gemäß 1.1.17 ist $\langle [a, b]^{s+1}\rangle \otimes \langle [a, b]^r [u, v]\rangle$ von mindestens Ordnung p^3. Somit hat aber au mindestens p^3 Konjugierte, was erneut der Zentralisatorschranke p^2 widerspricht. Es folgt die Behauptung. #

2.5.48 Satz Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 2. Dann gilt:
Die Kommutatorgruppe G' ist von Ordnung p^2 oder p^3.
Ist $|G'| = p^3$, so existieren Elemente $a, b, c \in G$ mit je p^2 Konjugierten derart, dass das elementarabelsche G' isomorph zu $\langle [a,b] \rangle \otimes \langle [a,c] \rangle \otimes \langle [b,c] \rangle$ ist.

Beweis: Sei $|G'| \geq p^3$ (den Existenzbeweis liefert Beispiel 2.5.9). Es existiert ein $x \in G$ mit $|[x,G]| = p^2$, so dass $[x,G] \cong \langle [x,a] \rangle \otimes \langle [x,b] \rangle$ mit geeigneten $a, b \in G$ ist (vgl. Lemma 2.5.47). Zudem existieren weitere Elemente $c, d \in G$ derart, dass $\langle [x,a] \rangle \otimes \langle [x,b] \rangle \otimes \langle [c,d] \rangle$ isomorph zu einer Untergruppe X aus G' der Ordnung p^3 ist. Gehen wir schrittweise weiter:

(i) c und d können stets so gewählt werden, dass nicht beide gleichzeitig in $C_G(x)$ liegen.
Bew.: Per Widerspruch! Seien also für alle $c, d \in G$ mit $[c,d] \notin [x,G]$ stets $c, d \in C_G(x)$, d.h. es sei $[x,c] = e = [x,d]$. Dann erzwingt dies, dass für alle $g \in G$ stets $[a,g], [b,g] \in [x,G]$ sind, da $a, b \notin C_G(x)$ sind. Mit 2.3.50 erhalten wir nun folgende Zerlegung für $0 \leq k, l, m \leq p-1$:
$[xc, a^k b^l d^m] = [xc,a]^k [xc,b]^l [c,d]^m \qquad (\star)$, denn $[x,d]$ verschwindet. Untersuchen wir zuerst den Kommutator $[xc,a]$, von dem wir zu Beginn annehmen, er wäre gleich e. Dann wäre $[x^2c, a^k b^l d^m] = [x^2c,a]^k [x^2c,b]^l [c,d]^m = [x,a]^k [c,d]^m [x^2c,b]^l$. Da allein durch die ersten zwei Faktoren p^2 Möglichkeiten für diesen Kommutator bestehen, erzwingt die Zentralisatorschranke p^2 zusammen mit 2.1.1, dass $[x^2c,b] \in \langle [x,a] \rangle$ sein muss, denn $[x^2c,b]$ liegt auch in $[x,G]$. Somit ist aber $[x^3c, a^k b^l d^m] = [x^2,a]^k [xc,a]^k [x,b]^l [x^2c,b]^l [c,d]^m = ([x,a]^{2k} [x^2c,b]^l)[x,b]^l [c,d]^m$, was für $p \neq 2$ zu mindestens p^3 Konjugierten für x^3c führen würde.
Also muss $[xc,a] \neq e \neq [xc,b]$ gelten (für $[xc,b]$ zeigt man die Aussage analog).
Betrachten wir nun $[xc,b]$ und nehmen vorerst an, es wäre $[xc,b] \in \langle [xc,a] \rangle$. Kann dann $[x^2c,b] = [xc,b][x,b]$ in $\langle [x^2c,a] \rangle$ liegen?
Gehen wir davon aus, dem wäre so, dann existieren $0 \leq r, s \leq p-1$ derart, dass $[xc,b] = [xc,a]^r$ und $[x^2c,b] = [x^2c,a]^s$ ist. Somit ergäbe sich für den Kommutator $[x,b] \notin \langle [x,a] \rangle$ die Zerlegung $[x,b] = [x^2c,b][xc,b]^{-1} = [x^2c,a]^s [xc,a]^{-r} = [x,a]^s [xc,a]^{s-r}$. Es muss $s - r \not\equiv 0 \pmod p$ sein, also $[xc,a]^{s-r}$ echt außerhalb von $\langle [x,a] \rangle$ liegen (weitere Konsequenz: $\langle [xc,a] \rangle \neq \langle [x,a] \rangle$).
Betrachten wir nun $[x^3c,b] = [x^2c,b][x,b] = [x^2c,a]^s [x,a]^s [xc,a]^{s-r} = [x^3c,a]^s [xc,a]^{s-r}$, welches nicht in $\langle [x^3c,a] \rangle$ liegt, denn $[x^3c,a] = [x,a]^2 [xc,a]$ liegt nicht in $\langle [xc,a] \rangle \neq \langle [x,a] \rangle$, also ist $\langle [x^3c,a] \rangle \neq \langle [xc,a] \rangle$. Ergo ist $\langle [x^3c,b] \rangle \neq \langle [x^3c,a] \rangle$.
Somit liefert $[x^3c, a^k b^l d^m] = [x^3c,a]^k [x^3c,b]^l [c,d]^m$ einen Widerspruch, denn für $p \neq 2$ gibt es insgesamt p^3 Wahlmöglichkeiten. Die Konsequenz: $[x^2c,b] \notin \langle [x^2c,a] \rangle$.
Demzufolge ist $[x^2c, a^k b^l d^m] = [x^2c,a]^k [x^2c,b]^l [c,d]^m$, womit wieder p^3 Möglichkeiten beständen. Erneut ein Widerspruch, so dass $[xc,b] \notin \langle [xc,a] \rangle$ gelten muss.
Somit wäre jedoch $[x,G] \cong \langle [xc,a] \rangle \otimes \langle [xc,b] \rangle$ und in Gleichung $(\star)$ ergäben sich p^3 verschiedene Möglichkeiten, was sich wiederum nicht mit der Zentralisatorschranke p^2 vereinbaren lässt. Es folgt also Behauptung (i). $\checkmark$

Sei o.B.d.A. im Folgenden $[x,d] \neq e$, und natürlich $[x,d] \in [x,G]$. Dann lässt sich ein $u \in G$ derart finden, dass $X \cong \langle [x,u] \rangle \otimes \langle [x,d] \rangle \otimes \langle [c,d] \rangle$ ist. Betrachten wir nun den Kommutator
$[xd, u^k c^l d^m] = [x,u]^k [x,d]^m [d,c]^l \cdot [x,c]^l [d,u]^k \qquad (\star\star)$, bei dem für die Wahl der drei ersten Faktoren gerade p^3 Möglichkeiten bestehen. Somit darf nicht $[x,c] = e = [d,u]$ gelten. Die Elemente d und x sind prinzipiell gleich zu behandeln, da beide über p^2 Konjugierte verfügen; somit ist es ohne Belang, welcher der beiden Kommutatoren $[x,c]$ bzw. $[d,u]$ ungleich e ist; sei o.B.d.A. $[x,c] \neq e$.

Es findet sich dabei $[x,c]$ in $\langle[x,u]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle$ und $[d,u]$ in $\langle[x,d]\rangle \otimes \langle[c,d]\rangle$ wieder.
Nehmen wir an, es sei $[x,c] \in \langle[x,d]\rangle$. Da $[x,u][d,u] \notin \langle[x,d]\rangle \otimes \langle[d,c]\rangle$ ist, weil schon $[d,u]$ allein in $\langle[x,d]\rangle \otimes \langle[d,c]\rangle$ liegt, ist $X \cong \langle[x,u][d,u]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle \otimes \langle[d,c]\rangle$. Nach $(\star\star)$ ergibt sich somit ein Widerspruch, denn es ist $[xd, u^k c^l d^m] = ([x,u][d,u])^k([x,d]^m[x,c]^l)[d,c]^l$. Also ist $[x,c] \notin \langle[x,d]\rangle$. Damit können wir zeigen:

(ii) $X \cong \langle[x,c]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle \otimes \langle[c,d]\rangle$.
Bew.: Die Existenz einer solchen Untergruppe ist nach 2.5.9 gegeben. Da $[x,c] \notin \langle[x,d]\rangle$ ist, sehr wohl aber in $\langle[x,u]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle$, ist Letzteres isomorph zu $\langle[x,c]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle$ und es folgt (ii). $\surd$

Sei nun $|G'| \geq p^4$. Dann existieren weitere Elemente $g,h \in G$ derart, dass das direkte Produkt $\langle[x,c]\rangle \otimes \langle[x,d]\rangle \otimes \langle[c,d]\rangle \otimes \langle[g,h]\rangle$ isomorph zu einer Untergruppe Y aus G' der Ordnung p^4 ist. Die Elemente x, c und d sind dabei völlig gleichwertig zu behandeln und analog eben lassen sich Untergruppen der Form X bilden in Y und damit zeigen, dass g und h so wählbar sind, dass $[g,c] \neq e \neq [g,d] \notin \langle[g,h]\rangle$ sowie $[g,c],[g,d] \notin \langle[c,d]\rangle$ $(\star\star\star)$ ist (man betrachte $\tilde{X} \cong \langle[x,d]\rangle \otimes \langle[c,d]\rangle \otimes \langle[g,h]\rangle$ und schließe analog eben). Da außerdem die p^2 Kommutatoren aus $[c,G]$ und $[d,G]$ bekannt sind, existieren Hochzahlen $0 \leq k,l,m,n \leq p-1$ derart, dass $e \neq [g,c] = [x,c]^k[c,d]^l$ und $e \neq [g,d] = [x,d]^m[c,d]^n$ ist. Andererseits erzwingt die Zentralisatorschranke p^2, dass $[g,c] \in \langle[g,d]\rangle \otimes \langle[g,h]\rangle$ ist, d.h. es existieren $0 \leq r,s \leq p-1$ mit $[g,c] = [g,d]^r[g,h]^s$, so dass sich die Gleichung $[x,c]^k[c,d]^l = [x,d]^{rm}[c,d]^{rn}[g,h]^s$ ergibt. Da die Darstellung bei einem direkten Produkt eindeutig ist, können die Exponenten miteinander verglichen werden und man erhält $k = 0 = s$, sowie $m = 0$. Zudem muss $nr \equiv l \pmod p$ sein. Damit sind aber $[g,c]$ und $[g,d]$ Elemente aus $\langle[c,d]\rangle$, was $(\star\star\star)$ widerspricht. Somit kann $|G'| \not\geq p^4$ sein, womit der Satz, zusammen mit Aussage (ii), bewiesen ist. #

Nach diesem äußerst umfangreichen Beweis ist die Struktur der Kommutatorgruppe im Falle von Nilpotenz der Klasse 2 bekannt. Machen wir uns also Gedanken zur anderen Möglichkeit, wenn G nilpotent der Klasse 3 ist. In diesem Fall ist $G/\mathcal{K}_3(G)$ nilpotent von Klasse 2 (Kommutatoren der Länge 3 verschwinden in dieser Faktorgruppe), so dass eben bewiesener Satz erzwingt, dass $(G/\mathcal{K}_3(G))' = G'/\mathcal{K}_3(G)$ höchstens von Ordnung p^3 ist, womit 2.5.46 bereits eine erste Einschränkung, nämlich $|G'| \leq p^5$, ergibt. Doch wollen wir uns mit dieser Aussage nicht zufrieden geben. Gewinnen wir zuerst Klarheit über den Exponenten von $G'/\mathcal{K}_3(G)$:

2.5.49 Lemma Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 3. Dann gilt:
Die Faktorgruppe $G'/\mathcal{K}_3(G)$ hat den Exponenten p.

Beweis: Sei G gegeben wie in 2.5.46. Dann ist $\mathcal{K}_3(G) = \langle[x_1,[x_1,x_2]],[x_2,[x_1,x_2]]\rangle$ vom Exponenten p und Ordnung p oder p^2, d.h. wenigstens einer dieser beiden Kommutatoren ist nicht trivial; sei o.B.d.A. $[x_1,[x_1,x_2]] \neq e$.
Nehmen wir nun an, $G'/\mathcal{K}_3(G)$ hätte den Exponenten p^2 (mehr ist nach 2.5.39(iv) ohnehin nicht möglich), dann existieren $g,h \in G$ derart, dass $[g,h]\mathcal{K}_3(G)$ von Ordnung p^2 in $G'/\mathcal{K}_3(G)$ ist. Nach 2.5.34(ix) gilt zudem für alle $a,b \in G$ und $k \in \mathbb{Z}$, dass $[a,b^k] = [a,b]^k[b,[a,b]]^{\frac{(k-1)k}{2}}$ ist. Da Kommutatoren der Länge 4 verschwinden, bedeutet dies für beliebiges $\varphi \in G'$, dass $[g,\varphi^k] = [g,\varphi]^k \in \mathcal{K}_3(G)$ ist; da aber die p^2 Konjugierten von g nach Voraussetzung außerhalb von $\mathcal{K}_3(G)$ liegen (analoge Überlegung), erzwingt dies, ebenso wie für h, dass
$[g,G'] = \{e\} = [h,G']$ $(\star)$ ist. Nach 2.5.34(ix) gilt deshalb sogar $[g^k,h] = [g,h]^k = [g,h^k]$,

also $[g, G] = \langle [g, h] \rangle = [h, G]$. Zudem liegt G' in den Zentralisatoren dieser beiden Elemente, so dass diese Zentralisatoren Normalteiler vom Index p^2 sind.
Betrachten wir nun folgenden Kommutator aus G', auf den wir die Regeln aus 2.3.49 und 2.5.34 anwenden und stets $(\star)$ berücksichtigen $(0 \leq k \leq p^2 - 1,\ 0 \leq l \leq p-1)$:
$[gx_1, h^k[x_1, x_2]^l] = [g, h^k[x_1, x_2]^l][x_1, h^k[x_1, x_2]^l] = [g, h^k][g, [x_1, x_2]^l] \cdot [x_1, h^k][x_1, [x_1, x_2]^l] = [g, h]^k \cdot [x_1, h]^k[x_1, [x_1, x_2]]^l$.
Dabei ist der Kommutator $[x_1, h]^k$ stets ein Element der Menge $[h, G] = \langle [g, h] \rangle$.
Wäre $ord([x_1, h]) = p^2$, so wäre $[x_1, G] = \langle [x_1, h] \rangle$ von Ordnung p^2 (es ist $[x_1, h^k] = [x_1, h]^k$), womit $[x_1, G]$ kein nichttriviales Element aus $\mathcal{K}_3(G)$ enthalten würde, was $[x_1, [x_1, x_2]] \neq e$ widerspräche. Also muss $[x_1, h]$ von Ordnung p (oder 1) in $\langle [g, h] \rangle$ sein. Es existiert also ein $0 \leq j \leq p-1$ so, dass $[x_1, h] = [g, h]^{jp}$ und somit $[gx_1, h^k[x_1, x_2]^l] = [g, h]^{k(jp+1)} \cdot [x_1, [x_1, x_2]]^l$ ist. Damit gibt es aber p^3 Wahlmöglichkeiten, was $|[gx_1, G]| \leq p^2$ widerspricht. Deshalb muss $G'/\mathcal{K}_3(G)$ den Exponenten p haben. #

Somit ist $G'/\mathcal{K}_3(G)$ auf nur noch drei Möglichkeiten, nämlich Mächtigkeit p, p^2 oder p^3 bei jeweils Exponent p, eingeschränkt.

2.5.50 Lemma Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 3. Dann gilt:
Die Faktorgruppe $G'/\mathcal{K}_3(G)$ ist höchstens von Ordnung p^2.

Beweis: Nach 2.5.48 ist $G'/\mathcal{K}_3(G)$ höchstens von Ordnung p^3. Der Beweis wird per Widerspruch geführt; nehmen wir also an, dass $|G'/\mathcal{K}_3(G)| = p^3$ ist, dann wissen wir zudem, dass Elemente $a, b, c \in G$ derart existieren, dass die Faktorgruppe $G'/\mathcal{K}_3(G)$ isomorph zu $\langle [a, b]\mathcal{K}_3(G) \rangle \otimes \langle [a, c]\mathcal{K}_3(G) \rangle \otimes \langle [b, c]\mathcal{K}_3(G) \rangle$, diese Faktorgruppe zudem vom Exponenten p ist. Andererseits kennen wir $\mathcal{K}_3(G)$: Behalten wir die Bezeichnungen aus dem Beweis von 2.5.49 bei, so ist $\mathcal{K}_3(G) = \langle [x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]] \rangle$ und o.B.d.A. $[x_1, [x_1, x_2]] \neq e$. Dann ist $[x_1, x_2] \notin C_G(x_1)$, der Zentralisator $C_G(x_1)$ somit kein Normalteiler in G, also vom Index p^2. Damit ist $|[x_1, G]| = p^2$. Da andererseits $\mathcal{K}_3(G) \preceq Z(G) \preceq C_G(x_1)$ ist, kann $[x_1, x_2]$ nicht in $\mathcal{K}_3(G)$ liegen. Die Zentralisatoren $C_G(a)$, $C_G(b)$, $C_G(c)$ sind dagegen Normalteiler vom Index p^2, was man analog zum vorherigen Beweis ($\{e\} = [a, G'] = [b, G'] = [c, G']$) zeigt.
$x_1\mathcal{K}_3(G)$ hat somit nur p Konjugierte in $G/\mathcal{K}_3(G)$. Nehmen wir an, für alle $y \in \{a, b, c\}$ wäre $[x_1, y]\mathcal{K}_3(G) \neq \mathcal{K}_3(G)$. Da $|[x_1\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]| = p$ ist, muss nun $[x_1, a]\mathcal{K}_3(G)$ in $[a\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]$ liegen, andererseits aber auch in $\langle [x_1, b]\mathcal{K}_3(G) \rangle \subseteq [b\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]$, sowie im Erzeugnis $\langle [x_1, c]\mathcal{K}_3(G) \rangle \subseteq [c\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]$ enthalten sein.
Es müsste also $[x_1, a]\mathcal{K}_3(G) \in [a\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)] \cap [b\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)] \cap [c\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]$ erfüllt sein, doch dieser Durchschnitt ist trivial. Somit existiert ein $y \in \{a, b, c\}$ so, dass $[x_1, y]\mathcal{K}_3(G) = \mathcal{K}_3(G)$ gilt; sei dies o.B.d.A. $y = a$.
Da $[a, G] \cap \mathcal{K}_3(G) = \{e\}$ ist und $[x_1, a]$ in $\mathcal{K}_3(G)$ liegt, folgt sogar $[x_1, a] = e$, womit sich der nun betrachtete Kommutator, für $0 \leq i, j, k \leq p-1$ und unter Berücksichtigung von 2.3.49 und 2.5.34, berechnet zu:
$[a[x_1, x_2]\ ,\ b^jc^kx_1^i] = [a\ ,\ b^jc^kx_1^i] \cdot [[x_1, x_2]\ ,\ b^jc^kx_1^i] \cdot e =$
$([a\ ,\ b^jc^k][a\ ,\ x_1^i] \cdot e) \cdot ([[x_1, x_2]\ ,\ b]^j[[x_1, x_2]\ ,\ c]^k[[x_1, x_2]\ ,\ x_1]^i) =$
$([a, b^j][a, c^k] \cdot e) \cdot ([a, x_1]^i \cdot e) \cdot [x_1, [x_1, x_2]]^{-i} = ([a, b]^j \cdot e) \cdot ([a, c]^k \cdot e) \cdot [x_1, [x_1, x_2]]^{-i}$,
womit $|[a[x_1, x_2], G]| \geq p^3$ folgen würde. Doch dies widerspricht der Zentralisatorschranke p^2, so dass die Behauptung resultiert. #

Somit verbleiben nur noch zwei Möglichkeiten: Entweder ist $G'/\mathcal{K}_3(G)$ isomorph zu $\mathbb{Z}_p$ oder $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_p$. Insgesamt ist somit $|G'| \leq p^4$. In einem letzten Beweisschritt wird es jetzt möglich sein, auch im Fall von Nilpotenz der Klasse 3 die Ordnung der Kommutatorgruppe auf p^3 zu beschränken, so dass gilt:

2.5.51 Satz Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann gilt:
Die Kommutatorgruppe G' ist von Ordnung p^2 oder p^3. Man erhält zudem:
(i) Ist G nilpotent von Klasse 2, so ist G' entweder zyklisch von Ordnung p^2 oder besitzt den Exponenten p.
(ii) Ist G nilpotent von Klasse 3, so ist $G'/\mathcal{K}_3(G)$ zyklisch von Ordnung p, insbesondere besitzt $G/\mathcal{K}_3(G)$ die Zentralisatorschranke p. Zudem existieren Elemente $x_1, x_2 \in G$ derart, dass $G' = \langle [x_1,x_2], [x_1,[x_1,x_2]], [x_2,[x_1,x_2]] \rangle$ ist.

Beweis: Sei G nilpotent von Klasse 3. Es bleibt nur noch der Fall $|G'/\mathcal{K}_3(G)| = p^2$ auszuschließen, behaupten wir also, es wäre $|G'/\mathcal{K}_3(G)| = p^2$ und führen diese Aussage zum Widerspruch. Nach 2.5.49 ist schon bekannt, dass $G'/\mathcal{K}_3(G)$ den Exponenten p hat.
$G/\mathcal{K}_3(G)$ ist nilpotent von Klasse 2 und verfügt über die Zentralisatorschranke p^2 (vgl. 2.5.4), so dass ein $x \in G$ derart existiert, dass $C_{G/\mathcal{K}_3(G)}(x\mathcal{K}_3(G))$ normal und vom Index p^2 in $G/\mathcal{K}_3(G)$ ist. Mit $C_G(x)/\mathcal{K}_3(G) \preceq C_{G/\mathcal{K}_3(G)}(x\mathcal{K}_3(G))$ und 1.1.8 erhält man somit

$$p^2 = |G/\mathcal{K}_3(G) : C_{G/\mathcal{K}_3(G)}(x\mathcal{K}_3(G))| \leq |G/\mathcal{K}_3(G) : C_G(x)/\mathcal{K}_3(G)| = |G : C_G(x)| \leq p^2,$$

womit Gleichheit folgt und $C_G(x)/\mathcal{K}_3(G) = C_{G/\mathcal{K}_3(G)}(x\mathcal{K}_3(G)) \trianglelefteq G/\mathcal{K}_3(G)$ ist, also auch $C_G(x) \trianglelefteq G$ vom Index p^2 gilt.
Aus diesem Grund existieren nun $a, b \in G$ mit $G'/\mathcal{K}_3(G) \cong \langle [x,a]\mathcal{K}_3(G)\rangle \otimes \langle [x,b]\mathcal{K}_3(G)\rangle$. Weil $|[x\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]| = p^2 = |[x,G]|$ gilt, muss der Schnitt $[x,G] \cap \mathcal{K}_3(G)$ trivial sein, d.h. $[x,G']$ verschwindet. Damit berechnet sich $[x^k,a] = [x,a]^k$ für $k \in \mathbb{Z}$, und weil $\langle [x,a]\mathcal{K}_3(G)\rangle$ zyklisch von Ordnung p ist, ist der Schnitt von $\langle [x,a]\rangle$ mit $\mathcal{K}_3(G)$ trivial[17]. Analoges zeigt man für $\langle [x,b]\rangle$. Somit erhält man sogar $\quad G' \cong \langle [x,a]\rangle \otimes \langle [x,b]\rangle \otimes \mathcal{K}_3(G) \quad (\star)$.
Behalten wir erneut die Bezeichnungsweise aus dem Beweis von Lemma 2.5.49 bei, so ist $\mathcal{K}_3(G) = \langle [x_1,[x_1,x_2]], [x_2,[x_1,x_2]]\rangle$ und o.B.d.A. $[x_1,[x_1,x_2]] \neq e$, also $C_G(x_1)$ vom Index p^2 und kein Normalteiler in G.
Betrachten wir nun für $0 \leq i,j,k \leq p-1$ den Kommutator $[xx_1, [x_1,x_2]^i a^j b^k]$ und zerlegen diesen wieder unter Berücksichtigung von 2.3.49, 2.5.34 und der Tatsache, dass G'' verschwindet, so erhalten wir $[xx_1,[x_1,x_2]^i a^j b^k] = [xx_1,[x_1,x_2]^i][xx_1,a^jb^k] = [x,a^jb^k][x_1,a^jb^k][x_1,[x_1,x_2]]^i$, denn es ist $G' \preceq C_G(x)$, und da man $[x,a^jb^k]$ (auf gleiche Weise auch $[x_1,a^jb^k]$) zerlegt zu $[x,a^jb^k] = [x,a^j][x,b^k][a,[x,b]]^{jk} = [x,a]^j[x,b]^k[a,[x,a]]^{\frac{(j-1)j}{2}}[b,[x,b]]^{\frac{(k-1)k}{2}}[a,[x,b]]^{jk}$, erhält man schließlich

$$[xx_1,[x_1,x_2]^i a^j b^k] = [x,a]^j[x,b]^k[x_1,a]^j[x_1,b]^k[x_1,[x_1,x_2]]^i \cdot K_3(k,j) \text{ mit}$$

$K_3(k,j) := ([a,[x,a]][a,[x_1,a]])^{\frac{(j-1)j}{2}}([b,[x,b]][b,[x_1,b]])^{\frac{(k-1)k}{2}}([a,[x,b]][a,[x_1,b]])^{jk} \in \mathcal{K}_3(G)$.
Nach $(\star)$ gibt es nun eindeutig bestimmte $k_1, k_2 \in \mathcal{K}_3(G)$ und $0 \leq r,s,u,v \leq p-1$ derart, dass $[x_1,a] = [x,a]^r[x,b]^s k_1$ und $[x_1,b] = [x,a]^u[x,b]^v k_2$ ist. Mit $K_3^*(k,j) := k_1^j k_2^k K_3(k,j)$ erhalten wir somit:

$$[xx_1,[x_1,x_2]^i a^j b^k] = [x,a]^{j(1+r)+ku}[x,b]^{k(1+v)+js}[x_1,[x_1,x_2]]^i \cdot K_3^*(k,j).$$

[17] $\mathcal{K}_3(G) \setminus \{e\} \not\ni [x,a^p] = [x,a]^p[a,[x,a]]^{\frac{(p-1)p}{2}} = [x,a]^p$

Da $|[xx_1, G]| \le p^2$ gelten muss, für die Wahl von $[x_1, [x_1, x_2]]^i \cdot K_3^*(k,j)$ unabhängig von der Wahl von k und j stets p Möglichkeiten bestehen, muss in den beiden ersten Faktoren $[x,a]^{j(1+r)+ku}[x,b]^{k(1+v)+js}$ die Abhängigkeit von k oder j verschwinden; seien diese Faktoren o.B.d.A. von j unabhängig, so erfordert dies $r = -1$ und $s = 0$. Es gilt also:
$[x_1, a] = [x, a]^{-1}k_1$ und $[x_1, b] = [x, a]^u[x, b]^v k_2$. Da aber $|[x_1\mathcal{K}_3(G), G/\mathcal{K}_3(G)]| = p$ und zudem $[x_1, a] \in \langle [x, a], \mathcal{K}_3(G)\rangle$ gilt, ergibt sich $v = 0$ und deshalb $[x_1, b] = [x, a]^u k_2$ und man erhält analog eben mit geeigneten $J_3(k,j), J_3^*(k,j) \in \mathcal{K}_3(G)$:

$[x^2x_1, [x_1, x_2]^i a^j b^k] = [x, a]^{2j}[x, b]^{2k}[x_1, a]^j[x_1, b]^k[x_1, [x_1, x_2]]^i \cdot J_3(k,j)$, also
$[x^2x_1, [x_1, x_2]^i a^j b^k] = [x, a]^{j+ku}[x, b]^{2k}[x_1, [x_1, x_2]]^i \cdot J_3^*(k,j)$.

Somit ist $|[x^2x_1, G]| \ge p^3$ für $p \ne 2$, was 2.1.1 widerspricht und damit der Fall $|G'/\mathcal{K}_3(G)| = p^2$ ausgeschlossen werden kann.
Es gilt deshalb stets $|(G/\mathcal{K}_3(G))'| = |G'/\mathcal{K}_3(G)| = p$, womit $G/\mathcal{K}_3(G)$ die Zentralisatorschranke p besitzt. Außerdem erzwingt dies die Gleichheit $G' = \langle [x_1, x_2], [x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]]\rangle$.
Die restlichen Aussagen wurden bereits in 2.5.48 gezeigt. #

Man bedenke, dass im Fall $|G'| = p^2$ nach 2.5.4 auch die Umkehrung gilt!
Für Nilpotenz der Klasse 3 folgt zudem, dass $G' \cap Z(G) = \mathcal{K}_3(G)$ ist. Damit kann nun Aussage 2.5.45 verifiziert werden:
Es ist $(G/Z(G))' = G'Z(G)/Z(G) \cong G'/G' \cap Z(G) = G'/\mathcal{K}_3(G)$ und dieses von Ordnung p, also auch die Kommutatorgruppe von $G/Z(G)$, womit Letzteres die Zentralisatorschranke p besitzt.
Auch für Nilpotenz der Klasse 2 können wir Aussagen zur Faktorgruppe $G/Z(G)$ herleiten; dazu betrachten wir zuerst Zentralisatoren des Index p^2:

2.5.52 Lemma Sei $p \ne 2$ eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 2 und besitze eine Kommutatorgruppe der Ordnung p^3.
Nach 2.5.48 existieren Elemente $a, b, c \in G$ mit je p^2 Konjugierten derart, dass G' isomorph zu $\langle [a, b]\rangle \otimes \langle [a, c]\rangle \otimes \langle [b, c]\rangle$ ist.
Es gilt: $|G/(C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c))| = p^3$ und $G = \langle a, b, c, C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c)\rangle$.
Zudem ist $G/(C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c))$ elementarabelsch.

Beweis: Der Beweis wird schrittweise geführt:
(i) $C_G(x) = \langle x, C_G(x) \cap C_G(y)\rangle$ für $\{x, y\} \subseteq \{a, b, c\}$.
Bew.: Vergleichen wir o.B.d.A. die Gruppen $C_G(a)$ und $X := \langle a, C_G(a) \cap C_G(b)\rangle$. Offensichtlich ist $X \preceq C_G(a)$; nehmen wir nun an, dass $C_G(a) \setminus X$ nicht leer wäre, also ein $x \in C_G(a) \setminus X$ existiert. Dann kann $x \notin C_G(b)$ sein, sonst wäre es auch in $C_G(a) \cap C_G(b) \preceq X$ enthalten. Ergo ist der Kommutator $[x, b] \ne e$, also in $[b, G] \cong \langle [a, b]\rangle \otimes \langle [b, c]\rangle$ enthalten.
Angenommen, es wäre $[x, b] \in \langle [a, b]\rangle$, dann ist $[x, b] = [a, b]^i = [a^i, b]$ mit einem geeigneten $1 \le i \le p-1$, womit $e = [xa^{-i}, b]$ ist, also $xa^{-i} \in C_G(a) \cap C_G(b) \preceq X$ ist. Damit wäre aber auch $x = (xa^{-i})a^i \in X$, was ein Widerspruch ist.
Somit muss es ein $1 \le j \le p-1$ geben mit $[x, b] = [a, b]^i[c, b]^j \quad (\star)$. Dann ist

$$[ab, a^r x^s c^t] = [a, c]^t[a, b]^{-r}[x, b]^{-s}[b, c]^t = ([a, c][b, c])^t \cdot [a, b]^{-r-si}[b, c]^{sj},$$

wobei bereits die zwei ersten Faktoren, unabhängig von der Wahl von s, p^2 Möglichkeiten umfassen. Ergo muss der dritte Faktor stets verschwinden, d.h. $[b, c]^j \equiv e$ muss gelten, was

($\star$) widerspricht. Also resultiert $C_G(a) = \langle a, C_G(a) \cap C_G(b)\rangle$ und (i) ist gezeigt. $\surd$

(ii) $G = \langle x, y, z, C_G(x) \cap C_G(y)\rangle$ für $\{x, y, z\} \subseteq \{a, b, c\}$.
Bew.: Wegen 2.3.50 und 2.5.48 gilt stets $e = [x, y]^p = [x^p, y]$, also $x^p \in C_G(y)$, weshalb (i) und 1.3.2 ergeben: $p = |C_G(x)/(C_G(x) \cap C_G(y))| = |C_G(x)C_G(y)/C_G(y)|$. Somit schließt man $|G : \langle y, C_G(x)\rangle| = p$.
Angenommen, es wäre $z \in \langle y, C_G(x)\rangle$, dann existiert eine eindeutige Darstellung $z = y^j c$ mit $0 \leq j \leq p-1$ und $c \in C_G(x)$. Damit berechnet sich $[x, z] = [x, y^j c] = [x, y^j][x, c] = [x, y]^j$, weshalb $[x, z] \in \langle [x, y]\rangle$ wäre, was 2.5.48 widerspricht. Ergo ist $z \notin \langle y, C_G(x)\rangle$ und mit (i) resultiert $G = \langle z, y, C_G(x)\rangle = \langle x, y, z, C_G(x) \cap C_G(y)\rangle$. $\surd$

(iii) $C_G(x) \cap C_G(y) \preceq C_G(z)$ für $\{x, y, z\} \subseteq \{a, b, c\}$.
Bew.: Per Widerspruch! Behaupten wir, es wäre $C_G(x) \cap C_G(y) \npreceq C_G(z)$, dann resultiert (vgl. den Beweis von (ii)) aus $C_G(z) \prec (C_G(x) \cap C_G(y))C_G(z) \preceq C_G(y)C_G(z) \prec G$, dass $(C_G(x) \cap C_G(y))C_G(z) = C_G(y)C_G(z)$ ist.
Deshalb sind $y \in (C_G(x) \cap C_G(y))C_G(z)$ und analog $x \in (C_G(x) \cap C_G(y))C_G(z)$ und hiermit $G = \langle x, y, C_G(z)\rangle \preceq (C_G(x) \cap C_G(y))C_G(z) \prec G$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Also folgt die Behauptung. $\surd$
Aus (iii) folgt nun $C_G(x) \cap C_G(y) \cap C_G(z) = C_G(x) \cap C_G(y)$ und (ii) ergibt Teil 1 der Behauptung. Da G' in jedem der Zentralisatoren enthalten ist, folgt aus 1.2.5, dass die Faktorgruppe $G/(C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c))$ abelsch ist, und die Überlegungen zu Beginn des Beweises von (ii) ergeben den Exponenten p. #

2.5.53 Satz Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in 2.5.52. Dann sind $Z(G) = C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c)$, $G = \langle a, b, c, Z(G)\rangle$ und $G/Z(G)$ elementarabelsch von Ordnung p^3.

Beweis: Sei $M := C_G(a) \cap C_G(b) \cap C_G(c)$, dann ist $Z(G) \preceq M$. Nehmen wir an, es wäre $M \not\equiv Z(G)$, dann gibt es ein $x \in M \setminus Z(G)$ und ein $y \in G$ derart, dass $[x, y] \neq e$ ist. Andererseits gilt für $x \in M$ stets $[a, x] = [b, x] = [c, x] = e$.
Nach 2.5.52 lässt sich y darstellen als $y = a^u b^v c^w m$ mit $0 \leq u, v, w \leq p-1$ und $m \in M$, weshalb $e \neq [x, y] = [x, a]^u [x, b]^v [x, c]^w [x, m] = [x, m]$ resultiert, also o.B.d.A. $y \in M$ vorausgesetzt werden darf.
Betrachten wir nun für $0 \leq r, s, t \leq p-1$ den Kommutator $[xa, y^r b^s c^t]$, welcher erneut mit 2.3.50 zerlegt werden kann zu $[xa, y^r b^s c^t] = [x, y]^r [a, b]^s [a, c]^t$.
Andererseits ist $e \neq [x, y] = [a, b]^i [a, c]^j [b, c]^k$ mit geeigneten $0 \leq i, j, k \leq p-1$, so dass man $[xa, y^r b^s c^t] = [a, b]^{ri+s} [a, c]^{rj+t} [b, c]^{rk}$ erhält. Da durch Variation von s und t bei den zwei ersten Faktoren bereits p^2 Möglichkeiten bestehen, erfordert die Zentralisatorschranke p^2 zusammen mit 2.1.1, dass $[b, c]^{rk}$ verschwindet, also $[b, c]^k = e$ ist.
Ergo ist $[x, y] = [a, b]^i [a, c]^j$ und es berechnet sich

$$[xb, y^r a^s c^t] = [x, y]^r [b, a]^s [b, c]^t = [a, b]^{ri-s} [b, c]^t [a, c]^{rj},$$

wobei erneut die zwei ersten Faktoren p^2 Möglichkeiten ergeben und somit erneut $[a, c]^j = e$ ist, also $e \neq [x, y] = [a, b]^i$.
Auf diese Weise resultieren für $[xc, y^r a^s b^t] = [a, b]^{ri} [a, c]^{-s} [b, c]^{-t}$ gerade p^3 Möglichkeiten, was gemäß 2.1.1 ein Widerspruch zur Zentralisatorschranke p^2 ist!
Also ist $M \equiv Z(G)$ und aus 2.5.52 folgt die Behauptung. #

Im zur Zeit betrachteten Fall ist zudem G' vom Exponenten p, weshalb aus 2.5.38(iii) resultiert, dass $G^p \preceq Z(G)$ ist. Ohnehin gilt $G' \preceq Z(G)$, womit $\Phi(G) \preceq Z(G)$ folgt, also $|G/\Phi(G)| \geq p^3$ ist. Ergo wird G von mindestens drei Elementen erzeugt (vgl. 2.5.1).

2.5.54 Korollar Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in 2.5.52. Dann gilt:
Alle Zentralisatoren des Index p^2 sind abelsch.

Beweis: Sei $C_G(x)$ ein beliebiger Zentralisator des Index p^2. Nach Satz 2.5.53 muss nun $C_G(x) = \langle x, Z(G)\rangle$ sein, was offensichtlich abelsch ist. #

Alle diese Aussagen lassen sich sehr schön an Beispiel 2.5.12 nachvollziehen.
Die Beispiele 2.5.13 und 2.5.14 weisen zudem nach, dass für $|G'| = p^2$ sowohl $|G/Z(G)| = p^3$ als auch $|G/Z(G)| = p^4$ vorkommen können.
Betrachten wir nun den Fall, wenn G nilpotent von Klasse 3 ist. Nach 2.5.48(ii) gibt es dann $x_1, x_2 \in G$ mit $G' = \langle [x_1, x_2], [x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]]\rangle$, wobei wenigstens einer der zwei Kommutatoren der Länge 3 nicht trivial ist; sei dies o.B.d.A. $[x_1, [x_1, x_2]] \neq e$. Dann kann x_1 kein Element aus $D(x_1) \trianglelefteq G$ sein, denn sonst wäre auch $[x_1, x_2] \in D(x_1) \preceq C_G(x_1)$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Da weiterhin $C_G(x_1)$ ein Zentralisator des Index p^2 ist und $D(x_1)$ vom Index p^3, resultiert $C_G(x_1) = \langle x_1, D(x_1)\rangle$. Nun ist $N := \langle [x_1, x_2], C_G(x_1)\rangle$ ein Normalteiler von höchstens Index p in G; zu prüfen ist, ob x_2 in G enthalten ist. Angenommen, dem wäre so, dann ist x_2 von der Form $x_2 = [x_1, x_2]^r c$ mit $1 \leq r \leq p-1$ und $c \in C_G(x_1)$, denn $\tilde{c}[x_1, x_2] = [x_1, x_2][[x_2, x_1], \tilde{c}]\tilde{c} =: [x_1, x_2]c$ mit $c, \tilde{c} \in C_G(x_1)$.
Jetzt ist $[x_1, x_2] = [x_1, [x_1, x_2]^r][[x_1, x_2]^r, [x_1, c]][x_1, c] = [x_1, [x_1, x_2]]^r \in \mathcal{K}_3(G)$, was erneut einen Widerspruch liefert. Somit ist N vom Index p und es ergibt sich $G = \langle x_2, N\rangle = \langle x_1, x_2, D(x_1)\rangle$. Halten wir dies fest:

2.5.55 Lemma Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G zudem nilpotent von Klasse 3. Nach 2.5.48(ii) gibt es dann Elemente $x_1, x_2 \in G$ mit $G' = \langle [x_1, x_2], [x_1, [x_1, x_2]], [x_2, [x_1, x_2]]\rangle$, wobei o.B.d.A. $[x_1, [x_1, x_2]] \neq e$ sei.
Es gilt: $G = \langle x_1, x_2, D(x_1)\rangle$ und $C_G(x_1) = \langle x_1, D(x_1)\rangle$.

Jetzt betrachten wir, wie schon zuvor, den Fall $|G'| = p^3$, und erstes Ziel wird es sein zu zeigen, dass der Schnitt $C_G(x_1) \cap C_G(x_2) = D(x_1)$ ist.
Unter der Bedingung, dass G' von Ordnung p^3 ist, sind $C_G(x_1)$ und $C_G(x_2)$ jeweils unterschiedliche, nichtnormale Zentralisatoren des Index p^2, deren konjugierte Durchschnitte $D(x_1)$ bzw. $D(x_2)$ beide vom Index p^3 sind. Obige Fragestellung ist offenbar äquivalent dazu, ob $D(x_1) \setminus (D(x_1) \cap C_G(x_2)) = \emptyset$ erfüllt ist:

2.5.56 Lemma Es gelten die Bedingungen von 2.5.55, zudem sei $|G'| = p^3$. Dann gilt:
$C_G(x_1) = \langle x_1, D(x_1)\rangle$, $C_G(x_2) = \langle x_2, D(x_1)\rangle$ und $C_G(x_1) \cap C_G(x_2) = D(x_1)$.

Beweis: Per Widerspruch! Angenommen, es existiert ein $y \in D(x_1) \setminus (D(x_1) \cap C_G(x_2))$, dann ist $[x_1, y] = e$, jedoch $[x_2, y] \neq e$. Da $G/D(x_1)$ nicht abelsch ist, ist $G' \npreceq D(x_1)$, jedoch $\mathcal{K}_3(G) \preceq D(x_1)$ (schon allein wegen der Nilpotenz von Klasse 3 und 2.5.34(i)), welches wiederum maximal in G' liegt (vgl. 2.5.51(ii)).
Da für alle $d \in D(x_1) \trianglelefteq G$ stets $[g, d] \in D(x_1) \cap G' = \mathcal{K}_3(G)$ für irgendein $g \in G$ ist, resultiert insbesondere $\quad [x_2, y] \in \mathcal{K}_3(G) \quad (\star)$.

Somit folgt für alle $1 \leq v \leq p-1$, dass $[x_2, y^v] = [x_2, y]^v [y, [x_2, y]]^{\frac{(v-1)v}{2}} = [x_2, y]^v$ $(\star\star)$
ist wegen 2.5.34(ix),(i) und $(\star)$.
Andererseits gilt $[x_1, x_2^u] \in G' \setminus \mathcal{K}_3(G)$ für $1 \leq u \leq p-1$ $(\star\star\star)$ (und Analoges für $[x_2, x_1^u]$), denn wäre $[x_1, x_2^u] \in \mathcal{K}_3(G)$, so würde wegen 2.5.34(i),(vii) gelten, dass der Kommutator $e \equiv [[x_2, x_1^u], x_1] = [x_1, [x_1, x_2]]^u$ wäre, was offensichtlich falsch ist.
Betrachten wir nun $[x_1x_2, [x_1, x_2]^r y^s x_2^t] = [x_1x_2, [x_1, x_2]^r][x_1x_2, y^s x_2^t]$, wobei sich der letzte Faktor wegen 2.3.49 und 2.5.34 berechnet zu

$$[x_1x_2, y^s x_2^t] = [x_1, [x_2, y^s x_2^t]] \cdot [x_2, y^s x_2^t] \cdot [x_1, y^s x_2^t]$$
$$= [x_1, \underbrace{[x_2, y]}_{\in \mathcal{K}_3(G)}]^s [x_1, \underbrace{[x_2, x_2]}_{=e}]^t \cdot \underbrace{[x_2, y^s]}_{=[x_2,y]^s \text{ nach } (\star\star)} \cdot \underbrace{[y^s, [x_1, x_2^t]]}_{=e, \text{ verwende 2.5.34(viii) und } (\star)} [x_1, x_2^t]$$
$= e \cdot [x_2, y]^s \cdot [x_1, x_2^t]$ und damit resultiert:

$$[x_1x_2, [x_1, x_2]^r y^s x_2^t] = [x_1x_2, [x_1, x_2]]^r \cdot [x_2, y]^s \cdot [x_1, x_2^t].$$

Wäre nun $[x_2, y] \notin \langle [x_1x_2, [x_1, x_2]] \rangle$, so würden die zwei ersten Faktoren alle p^2 Elemente aus $\mathcal{K}_3(G)$ durchlaufen, während der letzte Faktor entweder gleich e ist oder echt außerhalb von $\mathcal{K}_3(G)$ liegt (siehe $(\star\star\star)$), womit 2.1.1 einen Widerspruch zur Zentralisatorschranke p^2 liefert.
Ergo ist $[x_2, y] \in \langle [x_1x_2, [x_1, x_2]] \rangle$ und analog eben erhält man

$$[x_1x_2^2, [x_1, x_2]^r y^s x_2^t] = [x_1x_2^2, [x_1, x_2]]^r \cdot [x_2, y]^{2s} \cdot [x_1, x_2^t],$$

was man nun wegen $p \neq 2$ auf gleiche Weise zum Widerspruch führt.
Somit resultiert $D(x_1) \equiv D(x_1) \cap C_G(x_2)$ und es folgt die Behauptung. #

2.5.57 Satz Die Voraussetzungen seien die gleichen wie in 2.5.56. Dann gilt:
Es sind $Z(G) = D(x_1) = C_G(x_1) \cap C_G(x_2)$, $G = \langle x_1, x_2, Z(G) \rangle$ und $G/Z(G)$ von Ordnung p^3 und Zentralisatorschranke p. Zudem sind alle Zentralisatoren des Index p^2 abelsch.

Beweis: Per Widerspruch! Angenommen, es existiert ein $y \in D(x_1) \setminus Z(G)$, dann gibt es ein $x \in G$ derart, dass $[x, y] \neq e$ ist; o.B.d.A. kann dieses $x \in D(x_1)$ gewählt werden, denn:
Nach den Überlegungen von Lemma 2.5.55 lässt sich ein jedes $x \in G$ darstellen in der Form $x = x_1^r x_2^s [x_1, x_2]^t d$ mit $0 \leq r, s, t \leq p-1$ und $d \in D(x_1)$.
Da nach 2.5.56 außerdem $[x_1, y] = e = [x_2, y]$ gilt und analog dem zu 2.5.56 gehörigen Beweis wieder gezeigt werden kann, dass Kommutatoren der Länge 3, von denen eine Komponente gleich y ist, verschwinden, erhält man mit 2.3.49

$$e \neq [x, y] = \underbrace{[x_1^r, y][x_2^s, y]}_{=e} \underbrace{[[x_1, x_2]^t, y]}_{=e, \text{ siehe oben}} [d, y] = [d, y].$$

Damit können wir nun auch $[x_1, x] = e = [x_2, x]$ annehmen, sowie, dass Kommutatoren der Länge 3, deren eine Komponente gleich x ist, verschwinden, und wie eben mit 2.3.49 und 2.5.34 berechnen:

$$[x_1x, y^r x_2^s [x_1, x_2]^t] = [x_1x, y^r x_2^s][x_1x, [x_1, x_2]^t]$$
$$= \underbrace{[x_1, [x, y^r x_2^s]]}_{=e} \underbrace{[x, y^r x_2^s]}_{=[x,y^r][x,x_2^s]=[x,y^r]} \underbrace{[x_1, y^r x_2^s]}_{=[x_1,y^r][x_1,x_2^s]=[x_1,x_2^s]} \cdot [x_1, [x_1, x_2]]^t \underbrace{[x, [x_1, x_2]]^t}_{=e}$$
$= [x, y]^r [x_1, [x_1, x_2]]^t \cdot [x_1, x_2^s]$

Genau wie im vorherigen Beweis zeigt man, dass $[x,y] \in \mathcal{K}_3(G)$ und $[x_1, x_2^s] \in G' \setminus \mathcal{K}_3(G)$ ist und dass deshalb $[x,y] \in \langle [x_1,[x_1,x_2]] \rangle$ gelten muss, ansonsten würde durch die zwei ersten Faktoren ganz $\mathcal{K}_3(G)$ durchlaufen (also p^2 Möglichkeiten), durch Variation des letzten Faktors entstände gemäß 2.1.1 ein Widerspruch zur Zentralisatorschranke p^2.
Nun betrachtet man jedoch

$$[x_2 x, y^r x_1^s [x_1,x_2]^t] = [x,y]^r [x_2,[x_1,x_2]]^t \cdot [x_2, x_1^s],$$

was wegen $[x,y] \notin \langle [x_2,[x_1,x_2]] \rangle$ erneut einen Widerspruch liefert. Also ist $D(x_1) = Z(G)$ und mit 2.5.56, 2.5.55 und 2.5.36(iii) folgt der erste Teil der Behauptung.
Da nun das Zentrum in jedem Zentralisator $C_G(x)$ des Index p^2 maximal ist, resultiert des Weiteren, dass diese Zentralisatoren $C_G(x) = \langle x, Z(G) \rangle$ abelsch sind. #

Unabhängig von der vorliegenden Nilpotenzklasse ist also eine Kommutatorgruppe der Ordnung p^3 hinreichend für ein Zentrum des Index p^3.
Wenden wir uns nun der Frage zu, ob es in einer p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2 sowohl Zentralisatoren vom Index p^2, die Normalteiler sind, geben darf, als auch gleichzeitig welche, die keine Normalteiler sind. Zu klären ist also das Problem, ob in einer p-Gruppe der Zentralisatorschranke p^2 mit Nilpotenzklasse 3 normale Zentralisatoren des Index p^2 zu finden sind.
Angenommen, dem wäre so, sei ein solcher Zentralisator $C_G(t)$. Dann enthält dieser somit die Kommutatorgruppe von G, so dass die Menge $[t, G']$ nur aus dem neutralen Element besteht; mit anderen Worten: Es ist $[t,G] \cap \mathcal{K}_3(G) = \{e\}$.
Falls $|G'| = p^2$ gilt, gäbe es schon rein rechnerisch nur $p^2 - p$ Elemente außerhalb von $\mathcal{K}_3(G)$, da $[t,G]$ neben dem neutralen Element noch aus $p^2 - 1$ verschiedenen Elementen aus $G \setminus \mathcal{K}_3(G)$ bestehen müsste und da stets $p^2 - p < p^2 - 1$ gilt, müssen in diesem Fall alle Zentralisatoren des Index p^2 nicht-normal in G sein (ganz in Analogie zu Satz 2.3.34).
Im Fall $|G'| = p^3$ und G nilpotent von Klasse 3 dagegen muss es auch (genau) einen normalen Zentralisator des Index p^2 geben, es ist dies $C_G([x_1,x_2])$, der weder x_1 noch x_2 enthält (die Bezeichnungen seien wieder die gleichen wie in 2.5.56) und somit analog den Überlegungen zu 2.5.55 vom Index p^2 ist und offensichtlich ganz G' enthält, also gemäß 2.3.64 normal ist. Das „genau" erklärt sich dadurch, dass $G' \not\leq Z(G)$ ist, G' jedoch in normalen Zentralisatoren des Index p^2 enthalten ist, ergo normale Zentralisatoren des Index p^2 stets durch $\langle [x_1,x_2], Z(G) \rangle$ erzeugt werden. Formulieren wir diese Ergebnisse als

2.5.58 Satz Sei p eine Primzahl, sei G eine p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann gilt:
(i) Ist $|G'| = p^2$, so sind entweder alle Zentralisatoren des Index p^2 Normalteiler oder keiner.
(ii) Ist $|G'| = p^3$ und $p > 2$, so gibt es immer einen normalen Zentralisator des Index p^2. Falls G nilpotent von Klasse 3 ist, so gibt es genau einen solchen Zentralisator, es ist dies (mit den Bezeichnungen von 2.5.56) gerade $C_G([x_1,x_2]) = G'Z(G)$.

Ergebnis (i), und das aus Satz 2.5.51(ii), lässt sich an den Beispielen 2.5.33 und 2.5.37 nachvollziehen. Aussage (ii), sowie die Überlegungen in 2.5.51(ii) und 2.5.55 bis 2.5.57 sollen mit folgendem abschließenden Beispiel illustriert werden:

2.5.59 Beispiel Sei X die Gruppe der oberen unitriangulären 5x5-Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}_p$ mit p Elementen, $p > 2$ prim, und sei Y der Normalteiler von X, dessen Matrizen auf den drei ersten Nebendiagonalen den Eintrag 0 haben, dann umfasst X/Y jene Matrizen, bei denen der Eintrag auf der vierten Nebendiagonale ohne Belang ist. Sei nun G eine Untergruppe von X/Y, die gegeben ist durch $G = \{\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & * \\ & 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & & 1 & -a_1 & b_1 \\ & & & 1 & -a_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{K}_p\}$, also eine p-Gruppe der Ordnung p^6. Für zwei beliebige Gruppenelemente $A, U \in G$ lassen sich nun die anschließend aufgelisteten, elementaren Berechnungen durchführen:

$$A \cdot U := \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & * \\ & 1 & a_2 & b_2 & c_2 \\ & & 1 & -a_1 & b_1 \\ & & & 1 & -a_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 & w_1 & * \\ & 1 & u_2 & v_2 & w_2 \\ & & 1 & -u_1 & v_1 \\ & & & 1 & -u_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 + u_1 & b_1 + v_1 + a_1 u_2 & c_1 + w_1 + a_1 v_2 - b_1 u_1 & * \\ & 1 & a_2 + u_2 & b_2 + v_2 - a_2 u_1 & c_2 + w_2 + a_2 v_1 - b_2 u_2 \\ & & 1 & -a_1 - u_1 & b_1 + v_1 + a_1 u_2 \\ & & & 1 & -a_2 - u_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a_1 & -b_1 + a_1 a_2 & -c_1 + a_1^2 a_2 - a_1 b_1 + a_1 b_2 & * \\ & 1 & -a_2 & -b_2 - a_1 a_2 & -c_2 - a_1 a_2^2 + a_2 b_1 - a_2 b_2 \\ & & 1 & a_1 & -b_1 + a_1 a_2 \\ & & & 1 & a_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$AUA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 + a_1 u_2 - a_2 u_1 & \begin{matrix} w_1 + a_1(v_1 + v_2) - u_1(b_1 + b_2) \\ +a_1(a_1 u_2 - a_2 u_1) \end{matrix} & * \\ & 1 & u_2 & v_2 + a_1 u_2 - a_2 u_1 & \begin{matrix} w_2 + a_2(v_1 + v_2) - u_2(b_1 + b_2) \\ +a_2(a_1 u_2 - a_2 u_1) \end{matrix} \\ & & 1 & -u_1 & v_1 + a_1 u_2 - a_2 u_1 \\ & & & 1 & -u_2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$[A, U] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_1 u_2 - a_2 u_1 & \begin{matrix} a_1(v_1 + v_2) - u_1(b_1 + b_2) \\ +(a_1 + u_1)(a_1 u_2 - a_2 u_1) \end{matrix} & * \\ & 1 & 0 & a_1 u_2 - a_2 u_1 & \begin{matrix} a_2(v_1 + v_2) - u_2(b_1 + b_2) \\ +(a_2 + u_2)(a_1 u_2 - a_2 u_1) \end{matrix} \\ & & 1 & 0 & a_1 u_2 - a_2 u_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist nun $A \in C_G(U)$ genau dann, wenn folgendes Gleichungssystem erfüllt ist:
(I) $a_1u_2 - a_2u_1 = 0$ (II) $a_1(v_1+v_2) - u_1(b_1+b_2) = 0$ (III) $a_2(v_1+v_2) - u_2(b_1+b_2) = 0$.
Dazu sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- $u_2 = 0 \wedge u_1 = 0 \wedge v_1 = -v_2 :$ Dann sind stets alle Gleichungen erfüllt, ergo ist $U \in Z(G)$.
- $u_2 = 0 \wedge u_1 = 0 \wedge v_1 \neq -v_2 :$ Nun erzwingen (II) und (III), dass $a_1 = 0 = a_2$ gilt, woraus $|G : C_G(U)| = p^2$ folgt.
- $u_2 = 0 \wedge u_1 \neq 0 :$ Aus (I) resultiert $a_2 = 0$, (II) erfordert $b_1 = a_1\frac{v_1+v_2}{u_1} - b_2$, was erneut den Index $|G : C_G(U)| = p^2$ bedeutet.
- $u_2 \neq 0 \wedge u_1 = 0 :$ Die Bedingung $u_2 \neq 0$ liefert mit (I) gerade $a_1 = a_2\frac{u_1}{u_2}$, für $u_1 = 0$ resultiert somit $a_1 = 0$ und (II) verschwindet, wegen (III) gilt $b_1 = a_2\frac{v_1+v_2}{u_2} - b_2$; ergo ist $|G : C_G(U)| = p^2$.
- $u_2 \neq 0 \wedge u_1 \neq 0 :$ Wiederum ist $a_1 = a_2\frac{u_1}{u_2}$, was in (II) eingesetzt wird. Multiplikation mit u_2 und Division durch u_1 führt (II) in (III) über. Aus (III) erhält man wieder $b_1 = a_2\frac{v_1+v_2}{u_2} - b_2$, was den Index $|G : C_G(U)| = p^2$ ergibt.

Das Zentrum berechnet sich zu $Z(G) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & c_1 & * \\ & 1 & 0 & -b_1 & c_2 \\ & & 1 & 0 & b_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | b_1, c_1, c_2 \in \mathbb{K}_p\}$ und ist offenbar von Ordnung p^3, alle Elemente außerhalb des Zentrums haben einen Zentralisator vom Index p^2. Die Kommutatorgruppe G' dagegen stimmt nicht mit dem Zentrum überein, sie stellt sich dar als $G' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & c_1 & * \\ & 1 & 0 & b_1 & c_2 \\ & & 1 & 0 & b_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | b_1, c_1, c_2 \in \mathbb{K}_p\}$, ebenfalls von Ordnung p^3.
Das nächste Glied der absteigenden Zentralreihe ist von Ordnung p^2 und gleich dem Schnitt $Z(G) \cap G'$, es gilt nämlich $\mathcal{K}_3(G) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & c_1 & * \\ & 1 & 0 & 0 & c_2 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | c_1, c_2 \in \mathbb{K}_p\}$, all' dies in Übereinstimmung mit dem bisher Gezeigten.
Versuchen wir nun Elemente $X_1, X_2 \in G$, wie in 2.5.51(ii) beschrieben, zu identifizieren:
Für $X_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ und $X_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ erhält man als Kommutator $[X_1, X_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & * \\ & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & 0 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ sowie $[X_1, [X_1, X_2]] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & * \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ und

$[X_2,[X_1,X_2]] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * \\ & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ und man prüft leicht nach, dass nun tatsächlich für $\mathcal{K}_3(G) = \langle [X_1,[X_1,X_2]],[X_2,[X_1,X_2]]\rangle$ und $G' = \langle [X_1,X_2],[X_1,[X_1,X_2]],[X_2,[X_1,X_2]]\rangle$ gelten, ebenso leicht verifiziert man $G = \langle X_1, X_2, Z(G)\rangle$, eine Aussage aus 2.5.57.
Kontrollieren wir nun 2.5.58(ii): Aus obiger Diskussion des Gleichungssytems erkennt man, dass $C_G([X_1,X_2]) = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & c_1 & * \\ & 1 & 0 & b_2 & c_2 \\ & & 1 & 0 & b_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | b_1,b_2,c_1,c_2 \in \mathbb{K}_p\} \trianglelefteq G$ vom Index p^2 ist, dagegen ist $C_G(X_1) = \{\begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 & w_1 & * \\ & 1 & 0 & -v_1 & w_2 \\ & & 1 & -u_1 & v_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} | u_1,v_1,w_1,w_2 \in \mathbb{K}_p\}$ zwar auch vom Index p^2, jedoch kein Normalteiler, denn es ist $AUA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 - a_2u_1 & \square & * \\ & 1 & 0 & -v_1 - a_2u_1 & \square \\ & & 1 & -u_1 & v_1 - a_2u_1 \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$ für beliebiges $A \in G$ und $U \in C_G(X_1)$ und somit wegen $-v_1 - a_2u_1 \neq -(v_1 - a_2u_1)$ für $a_2u_1 \neq 0$ nicht in $C_G(X_1)$ enthalten.

2.5.60 Zusammenfassung Sei p eine Primzahl und G eine beliebige p-Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, so ist G auflösbar von Stufe 2 und seine Kommutatorgruppe ist von Mächtigkeit p^2 oder p^3. Des Weiteren sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

• Sind alle Zentralisatoren vom Index p^2 Normalteiler in G, so sind generell alle Zentralisatoren Normalteiler in G, und Letzteres ist nilpotent von Klasse 2. Ist $|G'| = p^3$, so ist G' elementarabelsch, ebenso wie $G/Z(G)$, auch jenes ist von Ordnung p^3. Zudem sind Zentralisatoren des Index p^2 abelsch (Letzteres für $p \neq 2$).

• Gebe es nun einen Zentralisator $C_G(t)$ vom Index p^2, der kein Normalteiler ist. Dann ist $|G/D(t)| = p^3$ und $G/D(t)$ nilpotent von Klasse 2. Außerdem hat diese Faktorgruppe einen Exponenten von höchstens p^2 und ist isomorph zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe der symmetrischen Gruppe S_{p^2}; diese ist dann entweder vom Typ M_3 oder K_3, welche in 2.4.15 und 2.4.16 charakterisiert sind.
Für die Faktorgruppe $G/Z(G)$ gilt, dass sie die Zentralisatorschranke p besitzt, genau wie $G/\mathcal{K}_3(G)$, womit der Index $|G' : \mathcal{K}_3(G)|$ gleich p ist (die beiden letzten Aussagen nur für $p \neq 2$). Die Gruppe G selber ist nun nilpotent von Klasse 3.
Genau wie im Fall von Nilpotenzklasse 2 folgt auch hier (für $p \neq 2$) aus einer Kommutatorgruppe der Ordnung p^3, dass $Z(G)$ den Index p^3 hat und Zentralisatoren des Index p^2 abelsch sind.

2.6 Gruppen mit Zentralisatorschranke 4

Bevor der Fall einer beliebigen Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2 betrachtet wird, soll, quasi als Überleitung, der Spezialfall einer Gruppe mit Zentralisatorschranke 4 untersucht werden, da sich in diesem Fall einige recht starke Aussagen gewinnen lassen, wie sie im allgemeinen Fall nicht möglich sind.
Legen wir die unterschiedlichen Möglichkeiten dar: Erwähnenswert ist einmal die Tatsache, dass die Zentralisatorschranke 4 beinhaltet, dass alle nichttrivialen Zentralisatoren, die nicht den Index 4 haben, von primem Index sind, also entweder 2 oder 3.
Interessant aber auch die Aussagen, die 2.1.7 und 2.1.8 liefern: Ist $t \in G$ ein solches Element mit $|G : C_G(t)| = 4$, so gilt für den Normalteiler $D(t) := \bigcap_{g \in G} gC_G(t)g^{-1}$, dass die Faktorgruppe $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe von S_4 ist, deren Mächtigkeit von 4 geteilt wird, d.h. es bestehen nur die Alternativen $|G/D(t)| \in \{4, 8, 12, 24\}$.
Diskutieren wir diese Fälle:
$|G/D(t)| = 4$ heißt wieder, dass $C_G(t) \trianglelefteq G$ ist; es liegt also wieder nahe, zwischen jenen Gruppen zu differenzieren, bei denen alle Zentralisatoren vom Index 4 Normalteiler sind, und jenen, bei welchen es Zentralisatoren vom Index 4 gibt, die eben keine invariante Untergruppe darstellen.
Sei also $t \in G$ so, dass $C_G(t)$ zwar den Index 4 hat, aber nicht normal in G ist, dann bestehen nur noch die Möglichkeiten $|G/D(t)| = 8$, d.h. $G/D(t)$ ist isomorph zu einer 2-Sylowgruppe von S_4, was gleichbedeutend ist mit $G/D(t) \cong D_4$ (welches in 2.3.58 erörtert wurde), oder $|G/D(t)| = 12$, d.h. $G/D(t)$ ist isomorph zur alternierenden Gruppe A_4, oder schließlich $|G/D(t)| = 24$, was Isomorphie zu S_4 bedeuten würde. Aber letzteren Fall kann man gerade ausschließen, denn S_4 hat nicht die Zentralisatorschranke 4, sondern Zentralisatorschranke 8; so ist beispielsweise $C_{S_4}(\ (a, b, c)\ ) = \langle (a, b, c) \rangle$ für beliebiges $(a, b, c) \in S_4$, also vom Index 8. Und das würde bedeuten, dass die Faktorgruppe $G/D(t)$ eine größere Zentralisatorschranke als G selber haben würde, was nach 2.1.5 unmöglich ist.
Somit verbleiben im zweiten Falle nur die Möglichkeiten $|G/D(t)| = 8$ oder 12, also $G/D(t)$ isomorph zu D_4 oder A_4, zu untersuchen.
Beginnen wir wieder mit dem Fall, dass alle Zentralisatoren des Index 4 Normalteiler sind. Die Frage, die uns nun bewegt, ist, ob dann generell alle Zentralisatoren Normalteiler sind; die Zentralisatoren des Index 2 sind es sicherlich, denn es gilt, als direkte Konsequenz aus 2.1.8:

2.6.1 Lemma Sei G eine Gruppe, sei U eine Untergruppe vom Index 2.
Dann ist U Normalteiler von G.

Bleiben nur die Zentralisatoren vom Index 3 zu untersuchen. Leider kann anfangs noch nicht völlig ausgeschlossen werden, dass es nicht-normale Zentralisatoren des Index 3 gibt (später werden wir sogar zeigen, dass es im Fall der Endlichkeit von G sogar gar keine Zentralisatoren des Index 3 geben darf), aber zumindest erhalten wir folgenden Satz (zur Definition von $M(t)$ vgl. 2.1.14):

2.6.2 Lemma Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4. Seien zudem alle Zentralisatoren des Index 4 Normalteiler in G. Dann gilt für alle $t \in G$, dass $M(t) \preceq C_G(t)$ ist.

Beweis: Der Beweis wird per Widerspruch geführt und Schritt für Schritt entwickelt. Für die Zentralisatoren des Index 2 oder 4 ist die Aussage trivial, da sie Normalteiler sind. Sei also $t \in G$ so, dass $C_G(t)$ vom Index 3 und $M(t) \npreceq C_G(t)$ ist, dann wäre $t \notin D(t)$ [18] und sowieso $C_G(t)$ kein Normalteiler in G. Satz 2.1.8 ergibt, dass $G/D(t)$ isomorph zu S_3 ist, also von Mächtigkeit 6. Es existiert dann ein $w \in G$ derart, dass $ord(wD(t)) = 3$ ist, also $\langle wD(t)\rangle$ vom Index 2 in $G/D(t)$ und damit nach vorigem Lemma ein Normalteiler von $G/D(t)$. In völliger Analogie zu 2.3.1 zeigt man, dass sich ein beliebiges $x \in \langle w, D(t)\rangle$ in der Form $x = w^j d$ mit $0 \le j \le 2$ und $d \in D(t)$ darstellen lässt und $\langle w, D(t)\rangle/D(t)$ gleich $\langle wD(t)\rangle$ ist; somit ist auch $\langle w, D(t)\rangle$ vom Index 2 in G und ein Normalteiler. Es gilt nun:

(i) $C_G(t) = \langle t, D(t)\rangle$.
Bew.: Es liegt t nicht in $D(t)$, somit ist $D(t) \prec \langle t, D(t)\rangle \preceq C_G(t)$. Da $D(t)$ maximal in $C_G(t)$ liegt, folgt die Behauptung. $\surd$

(ii) $G = \langle C_G(t), C_G(wtw^{-1})\rangle$.
Bew.: Da $wD(t)$ und $tD(t)$ teilerfremde Ordnungen in $G/D(t)$ haben, ist $w \notin C_G(t)$ und somit $wtw^{-1} \neq t$. Analog 2.3.18 erhält man $C_G(t) \not\equiv C_G(wtw^{-1})$ und schließlich Aussage (ii). $\surd$

(iii) $(G/D(t))' = \langle wD(t)\rangle = G'D(t)/D(t)$.
Bew.: (iii) ist eine Konsequenz aus $G/D(t) \cong D_3$ (vgl. 2.3.25) und $[xD(t), yD(t)] = [x,y]D(t)$ für beliebige $x, y \in G$. $\surd$

(iv) Für beliebiges $d \in D(t)$ ist $|G : C_G(td)| = 3$ und $C_G(td) \cap \langle w, D(t)\rangle = D(t)$.
Bew.: Per Widerspruch! Angenommen, es gäbe ein $d \in D(t)$ so, dass $C_G(td) \trianglelefteq G$ wäre. Dann wäre (Zentralisatorschranke 4) $G/C_G(td)$ abelsch und somit $G' \preceq C_G(td)$, damit auch $(G/D(t))' \preceq C_G(td)D(t)/D(t)$ und $wD(t) \in C_G(td)D(t)/D(t)$, wobei $w \notin D(t)$ ist. Also existiert ein $x \in C_G(td) \setminus D(t)$ so, dass $w = x\tilde{d}$ gilt mit geeignetem $\tilde{d} \in D(t)$. Dieses x liegt dann auch in $\langle w, D(t)\rangle$, so dass $x \in C_G(td) \cap \langle w, D(t)\rangle$, jedoch $x \notin D(t)$ ist.
Andererseits zeigt man analog zu 2.3.10, dass $C_{G/D(t)}(tdD(t)) \cap \langle w, D(t)\rangle/D(t) = \{D(t)\}$ und schließlich $C_G(td) \cap \langle w, D(t)\rangle \preceq D(t)$ ist, was sich offensichtlich widerspricht; somit kann $C_G(td)$ kein Normalteiler sein. Dies ist aber nur möglich, wenn $|G : C_G(td)| = 3$ ist. Damit kann man den Beweis analog zu 2.3.11 und 2.3.12(i) weiterführen und erhält aus $3 = |\langle w, D(t)\rangle : D(t)| \le ... \le |G : C_G(td)| = 3$ die Behauptung. $\surd$

(v) $D(t) = Z(G)$.
Bew.: Nach (iv) gilt für alle $d \in D(t)$, dass $td = d(td)d^{-1} = dt$ gilt, also t mit jedem $d \in D(t)$ vertauschbar ist. Damit zeigt man leicht unter Anwendung von (i), dass $C_G(t)$, und somit auch $C_G(wtw^{-1})$ (vgl. 2.1.10(iv)), abelsch sind. Analog 2.3.19 erhält man nun die Behauptung. $\surd$

Also ist $|G/Z(G)| = 6$, und für ein beliebiges $u \in G$ mit $|G : C_G(u)| = 4$ erhält man die Gleichung $|C_G(u) : Z(G)| = \frac{|G:Z(G)|}{|G:C_G(u)|} = \frac{6}{4} \notin \mathbb{N}$, was unmöglich ist. Also kann es keinen Zentralisator vom Index 3 geben, der seine Konjugierten nicht enthält. #

[18] Wäre $t \in D(t)$, so wären auch alle Konjugierten von t darin enthalten, da $D(t)$ ein Normalteiler ist. Dies hätte aber zur Folge, dass auch $M(t) \preceq D(t) \preceq C_G(t)$ wäre, was ein Widerspruch ist!

2.6.3 Satz Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4. Seien zudem alle Zentralisatoren des Index 4 Normalteiler in G. Dann gelten:
(i) Alle Zentralisatoren sind Normalteiler in G.
(ii) G ist nilpotent von Klasse 2.
(iii) G ist auflösbar von Stufe 2.

Beweis: Angenommen, es gäbe einen Zentralisator (des Index 3), der kein Normalteiler ist. Da 3 ein Teiler der Gruppenordnung ist, gibt es Elemente der Ordnung 3. Nach vorigem Satz ist für alle $t \in G$ auch $M(t) \preceq C_G(t)$, womit für jedes $g \in G$ stets $[t, g] \in C_G(t)$, also $[t, [t, g]] = e$ ist. Für alle Elemente ist hiermit die 2-Engelbedingung erfüllt und 2.5.35 liefert, dass G nilpotent von höchstens Klasse 3 ist. Es ist also G nilpotent, womit auch jede Faktorgruppe nilpotent sein muss; damit gilt für alle $x \in G$ mit $|G : C_G(x)| = 3$, dass $G/D(x)$ nicht isomorph zu $S_3 \cong D_3$ sein kann, denn dieses ist nicht nilpotent (vgl. 2.3.25). Dies erzwingt aber, dass alle Zentralisatoren des Index 3, und damit generell alle Zentralisatoren, Normalteiler in G sein müssen. Somit folgt die Behauptung analog zu 2.5.10. #

2.6.4 Beispiel Seien G_1 und G_2 beliebige Gruppen mit Zentralisatorschranke 2. Dann hat $G_1 \otimes G_2$ die Zentralisatorschranke 4 und ist zudem nilpotent von Klasse 2, sowie auflösbar von Stufe 2.

Beweis: Nach 2.6.1 sind alle Zentralisatoren in G_1 und G_2 jeweils Normalteiler, so dass G_1 und G_2 nach 2.3.43 und 2.3.44 gerade nilpotent von Klasse 2 und auflösbar von Stufe 2 sind; diese Eigenschaften übertragen sich auch auf $G_1 \otimes G_2$. 2.1.5(iv) liefert nun die Behauptung. #

Betrachten wir nun den Fall, dass ein $t \in G$ existiert, so dass $C_G(t)$ kein Normalteiler in G ist; es gilt dann $|G/D(t)| \in \{8, 12\}$. Beginnen wir mit $|G/D(t)| = 8$, d.h. dem Fall, wenn $G/D(t)$ isomorph zu D_4 ist. Da nach 2.6.1 alle Untergruppen vom Index 2 Normalteiler sind, kann dieser Fall in völliger Analogie zu den Überlegungen bei einer 2-Gruppe mit Zentralisatorschranke 4 behandelt werden, da nun auch hier Zentralisatoren des Index 2, die ja maximal in G sind, Normalteiler sind.
Es soll hier versucht werden, die Gruppe G aus ihrer Faktorgruppe $G/D(t)$ weitestgehend zu rekonstruieren. Nehmen wir dazu vorerst an, dass t nicht in $D(t)$ gelegen ist, d.h. wir betrachten Gruppen folgenden Types:
G sei eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4 und es gebe ein $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = 4$, $G/D(t) \cong D_4$ und $t \notin D(t)$ ist. Um eine weniger ausufernde Formulierung der anschließenden Sätze zu erlauben, sprechen wir im Folgenden von Gruppen mit Eigenschaft D_4.
Der Index 4 des Zentralisators liefert nun, dass $C_G(t) = \langle t, D(t)\rangle$ mit $t^2 \in D(t)$ ist und somit $\langle tD(t)\rangle$ kein Normalteiler in $G/D(t)$.
In $G/D(t)$ gibt es nun ein $wD(t)$ derart, dass $\langle wD(t)\rangle$ zyklisch von Ordnung 4 ist und deshalb automatisch ein Normalteiler in $G/D(t)$. Es ergibt sich somit, dass $\langle wD(t)\rangle = \langle w, D(t)\rangle/D(t)$ und $\langle w, D(t)\rangle \trianglelefteq G$ vom Index 2 ist.
Das Zentrum von $G/D(t)$ ist gleich $\langle w^2D(t)\rangle = \langle w^2, D(t)\rangle/D(t)$, welches somit Normalteiler in $G/D(t)$ und gleichzeitig einzige Untergruppe von Ordnung 2 in $\langle wD(t)\rangle$ ist; damit ist $tD(t) \notin \langle wD(t)\rangle$ und es ergibt sich G zu $G = \langle t, w, D(t)\rangle$, so dass gilt:

2.6.5 Lemma Sei G eine Gruppe mit Eigenschaft D_4.
Dann existiert ein $w \in G$ mit $G = \langle t, w, D(t)\rangle$, und ein beliebiges $x \in G$ lässt sich darstellen in der Form $x = t^j w^k d$ mit $0 \le j \le 1$, $0 \le k \le 3$ und $d \in D(t)$.

Es ist $G'D(t)/D(t) = (G/D(t))' = \langle w^2 D(t)\rangle$, womit $G' \preceq \langle w^2, D(t)\rangle$ gilt. Analog erhält man ($G/D(t)$ ist nilpotent von Klasse 2), dass $\mathcal{K}_3(G) \preceq D(t)$ ist.

2.6.6 Lemma Sei G eine Gruppe mit Eigenschaft D_4, sei $w \in G$ gewählt wie in Lemma 2.6.5. Dann ist $\mathcal{K}_2(G) \preceq \langle w^2, D(t)\rangle$ und $\mathcal{K}_3(G) \preceq D(t)$.

In $G/D(t)$ gilt nun, dass für ungerades k der Zentralisator $C_{G/D(t)}(w^k D(t)) = \langle w, D(t)\rangle/D(t)$ ist und somit $C_G(w^k d)D(t)/D(t) \preceq C_{G/D(t)}(w^k dD(t)) = \langle w, D(t)\rangle/D(t)$ für alle $d \in D(t)$ resultiert, also $C_G(w^k d) \preceq \langle w, D(t)\rangle =: W$ ist. Darum ist aber $C_G(w^k d) = C_W(w^k d)$, und für dessen Index gilt, dass $|W : C_W(w^k d)| = \frac{1}{2}|G : C_G(w^k d)| \in \{1, 2\}$ ist. Hiermit sind diese Zentralisatoren Normalteiler in W mit abelscher Faktorgruppe, so dass $W' \preceq C_W(w^k d)$ ist. Da außerdem offensichtlich $W/D(t)$ abelsch ist, gilt zudem, dass W' auch in $D(t)$ gelegen ist. Halten wir diese Ergebnisse fest:

2.6.7 Lemma Sei G eine Gruppe mit Eigenschaft D_4, sei $w \in G$ gewählt wie in Lemma 2.6.5. Dann gilt für ungerades k und alle $d \in D(t)$, dass $C_G(w^k d) \trianglelefteq \langle w, D(t)\rangle =: W$ ist, zudem W' eine Untergruppe von $C_G(w^k d) \cap D(t)$.

Sei nun k geradzahlig und $\tilde{d} \in D(t)$ beliebig, dann lässt sich $w^k \tilde{d}$ darstellen in der Form $w \cdot w^j d$ mit $j \in \{1, 3\}$ und $d \in D(t)$ geeignet. Mit 2.3.49 ergibt sich für irgendein $\nu \in W'$, dass $[w^k \tilde{d}, \nu] = [w, [w^j d, \nu][w^j d, \nu][w, \nu]$ ist, und 2.6.7 liefert, dass alle drei Faktoren verschwinden, sich somit für alle $x \in W$ der Kommutator $[x, \nu]$ zu e berechnet, und wir erhalten:

2.6.8 Lemma Sei G eine Gruppe mit Eigenschaft D_4, sei $w \in G$ gewählt wie in Lemma 2.6.5. Dann gilt für $W := \langle w, D(t)\rangle$, dass W nilpotent von höchstens Klasse 2, also insbesondere $W' \preceq Z(W)$ ist.

Sei nun $g \in G$ beliebig gewählt, d.h. g lässt sich nach 2.6.5 schreiben als $g = t^j w^k d$. Wieder ergibt 2.3.49, dass für irgendein $\tilde{d} \in D(t)$ gilt, dass $[g, \tilde{d}] = [t^j, [w^k d, \tilde{d}]][w^k d, \tilde{d}][t^j, \tilde{d}] = [w^k d, \tilde{d}]$ ist, da einerseits $\tilde{d} \in C_G(t)$ liegt, also $[t^j, \tilde{d}] = e$ ist, andererseits $[w^k d, \tilde{d}] \in W' \preceq D(t)$ ist nach 2.6.7, und somit auch der erste Faktor verschwindet. Wir erhalten auf diese Weise $[G, D(t)] \preceq W'$. Da zudem 2.6.6 besagt, dass $\mathcal{K}_3(G)$ als Untergruppe in $D(t)$ liegt, ergibt sich folgendes Lemma:

2.6.9 Lemma Sei G eine Gruppe mit Eigenschaft D_4, sei $w \in G$ gewählt wie in Lemma 2.6.5. Dann gilt für $W := \langle w, D(t)\rangle$, dass $\mathcal{K}_4(G) \preceq W'$ und $\mathcal{K}_5(G) = \{e\}$ ist.

Beweis: Sei wieder $\nu \in W' \preceq D(t)$ beliebig gewählt, dann ergibt sich mit irgendeinem $g \in G$ ($g = t^j w^k d$ wie oben), dass

$$[g, \nu] = [t^j, [w^k d, \nu]][w^k d, \nu][t^j, \nu] = [w^k d, \nu] \in [W, W'] = \{e\}$$

ist, denn W ist nilpotent von höchstens Klasse 2. Zusammen mit den Vorüberlegungen erhält man, dass $\mathcal{K}_5(G)$ verschwindet. #

Somit ist G nilpotent von höchstens Klasse 4.
Mit diesen Überlegungen erhält man nun, vergleichbar mit 2.5.36, folgendes Ergebnis:

2.6.10 Satz Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, und existiere ein $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = 4$ und $|G/D(t)| = 8$ ist, dann gelten:
(i) Alle Zentralisatoren des Index 2 und 3 sind Normalteiler.
(ii) Für alle $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = 4$ und $C_G(t) \not\trianglelefteq G$ ist $|G/D(t)| = 8$.
(iii) G ist nilpotent der Klasse 3.
(iv) G ist auflösbar von Stufe 2.

Beweis: Es sind die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:
Fall 1: Für alle $g \in G$ sei $g \in D(g)$. Dann enthält für jedes $g \in G$ der Zentralisator $C_G(g)$ alle Konjugierten von g und somit auch für beliebiges $h \in G$ den Kommutator $[g, h]$. Damit ist aber für alle $g, h \in G$ stets $[g, [g, h]] = e$ und 2.5.35 erzwingt, dass G nilpotent von höchstens Klasse 3 und auflösbar von Stufe 2 ist.[19]
Fall 2: Nun gebe es ein $t \in G$ so, dass $t \notin D(t)$ ist; dies ist nur möglich, wenn $|G : C_G(t)| = 3$ oder 4 ist.
Fall 2.1: Sei für alle $g \in G$ mit $|G : C_G(g)| = 4$ stets $g \in D(g)$. Dann gibt es nach Voraussetzung ein $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = 3$ und $t \notin D(t)$. Diesen Fall führt man völlig analog zum Beweis von 2.6.2 zum Widerspruch, so dass gilt:
Fall 2.2: Es existert ein $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = 4$ und $t \notin D(t)$. Nun führt man den Beweis gemäß 2.6.5 bis 2.6.9 und erhält, dass G auch in diesem Fall nilpotent (von höchstens Klasse 4) ist.
Somit ist G also in jedem Fall nilpotent, und damit auch jede seiner Faktorgruppen. Analog 2.6.3 folgt deshalb, dass alle Zentralisatoren des Index 3 Normalteiler sind; daraus resultiert (i). Auf gleiche Weise belegt man aber auch, dass es kein $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = 4$ und $C_G(t)$ nicht normal in G <u>und</u> $G/D(t) \cong A_4$ geben kann, denn dieses ist nicht nilpotent (vgl. anschließende Diskussion von A_4), was (ii) ergibt.
Hiermit ist $G/D(x)$ für alle $x \in G$ nilpotent von höchstens Klasse 2; analog 2.5.36 folgen (iii) und (iv). #

Es ist doch bemerkenswert, dass sich die Ergebnisse des Falles einer 2-Gruppe ohne Abstriche auf den Fall einer beliebigen (nilpotenten) Gruppe mit Zentralisatorschranke 4 übertragen lassen.
Bevor wir nun zur dritten Möglichkeit, $G/D(t) \cong A_4$, gelangen (in diesem Fall ist dann G keinesfalls nilpotent, da es eine nicht-nilpotente Faktorgruppe besitzt), soll noch kurz eine Aussage über die Struktur endlicher nilpotenter Gruppen mit Zentralisatorschranke 4 gemacht werden, die man mit 2.3.56, 2.1.1(iv) und 2.2.1 beweist:

2.6.11 Satz Sei G eine endliche Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, sei G nilpotent. Dann ist G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.
Die 2-Sylowgruppe von G hat die Zentralisatorschranke 4, die übrigen Sylowgruppen sind abelsch.

Eine Konsequenz aus diesem Satz ist auch, dass wir im endlichen, nilpotenten Fall nach keinen neuen Beispielen für die Zentralisatorschranke 4 Ausschau halten müssen, sind diese Gruppen doch in diesem Fall isomorph zum direkten Produkt einer 2-Gruppe mit Zentralisatorschranke 4 und einer abelschen Gruppe; Beispiele zu Ersteren wurden im vorigen Kapitel diskutiert, Beispiele in diesem Kapitel würden sich nur um eine abelsche Komponente unterscheiden.

[19] Satz 2.5.31 erfordert umgekehrt, dass G mindestens von Klasse 3 ist; nach 2.5.35 könnte dies höchstens dann realisiert sein, wenn G Elemente von Ordnung 3 enthält.

Des Weiteren kann man aber insbesondere aus 2.6.11 ableiten, dass einerseits $|G'|$ eine Potenz von 2 sein muss und zudem keine Zentralisatoren vom Index 3 existieren dürfen, denn die 3-Sylowgruppe von G ist abelsch. Also sind auch $|G/Z(G)|$ sowie $|G : C_G(g)|$ bzw. $|G : D(g)|$ für irgendein $g \in G$ stets eine 2er-Potenz und man kann 2.6.10 präzisieren als

2.6.12 Satz Sei G eine endliche Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, sei G nilpotent. Dann gelten:
(i) G ist auflösbar von Stufe 2 und nilpotent von Klasse 2 oder 3.
(ii) $|G'|$ und $|G/Z(G)|$ sind eine Potenz von 2.
(iii) Ist $C_G(g) \trianglelefteq G$, so ist $G/C_G(g)$ abelsch, im anderen Fall ist $G/D(g)$ isomorph zu D_4. Insbesondere gibt es keine Zentralisatoren des Index 3.

Schon an dieser Stelle sei vermerkt, dass wir im anschließenden Kapitel Zentralisatoren vom Index 3 auch für den unendlichen (nilpotenten) Fall ausschließen können, vgl. dazu 2.7.24.
Doch nun zur dritten Möglichkeit, d.h. zum Fall, dass $G/D(t)$ isomorph zu A_4 ist. Bei diesem Fall ist es sinnvoll, zu Beginn erst einmal einige wichtige Eigenschaften von A_4 zusammenzustellen.

A_4	(1)	(1,2)(3,4)	(1,3)(2,4)	(1,4)(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2,4)	(1,4,2)	(1,3,4)	(1,4,3)	(2,3,4)	(2,4,3)	I
(1)	(1)	(1,2)(3,4)	(1,3)(2,4)	(1,4)(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2,4)	(1,4,2)	(1,3,4)	(1,4,3)	(2,3,4)	(2,4,3)	1
(1,2)(3,4)	(1,2)(3,4)	(1)	(1,4)(2,3)	(1,3)(2,4)	(2,4,3)	(1,4,3)	(2,3,4)	(1,3,4)	(1,4,2)	(1,3,2)	(1,2,4)	(1,2,3)	3
(1,3)(2,4)	(1,3)(2,4)	(1,4)(2,3)	(1)	(1,2)(3,4)	(1,4,2)	(2,3,4)	(1,4,3)	(1,2,3)	(2,4,3)	(1,2,4)	(1,3,2)	(1,3,4)	3
(1,4)(2,3)	(1,4)(2,3)	(1,3)(2,4)	(1,2)(3,4)	(1)	(1,3,4)	(1,2,4)	(1,3,2)	(2,4,3)	(1,2,3)	(2,3,4)	(1,4,3)	(1,4,2)	3
(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,4)	(2,4,3)	(1,4,2)	(1,3,2)	(1)	(1,3)(2,4)	(1,4,3)	(2,3,4)	(1,4)(2,3)	(1,2)(3,4)	(1,2,4)	4
(1,3,2)	(1,3,2)	(2,3,4)	(1,2,4)	(1,4,3)	(1)	(1,2,3)	(2,4,3)	(1,4)(2,3)	(1,2)(3,4)	(1,4,2)	(1,3,4)	(1,3)(2,4)	4
(1,2,4)	(1,2,4)	(1,4,3)	(1,3,2)	(2,3,4)	(1,4)(2,3)	(1,3,4)	(1,4,2)	(1)	(1,3)(2,4)	(2,4,3)	(1,2,3)	(1,2)(3,4)	4
(1,4,2)	(1,4,2)	(2,4,3)	(1,3,4)	(1,2,3)	(2,3,4)	(1,3)(2,4)	(1)	(1,2,4)	(1,3,2)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)	(1,4,3)	4
(1,3,4)	(1,3,4)	(1,2,3)	(1,4,2)	(2,4,3)	(1,2,4)	(1,4)(2,3)	(1,2)(3,4)	(2,3,4)	(1,4,3)	(1)	(1,3)(2,4)	(1,3,2)	4
(1,4,3)	(1,4,3)	(1,2,4)	(2,3,4)	(1,3,2)	(1,2)(3,4)	(2,4,3)	(1,2,3)	(1,3)(2,4)	(1)	(1,3,4)	(1,4,2)	(1,4)(2,3)	4
(2,3,4)	(2,3,4)	(1,3,2)	(1,4,3)	(1,2,4)	(1,3)(2,4)	(1,4,2)	(1,3,4)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)	(1,2,3)	(2,4,3)	(1)	4
(2,4,3)	(2,4,3)	(1,4,2)	(1,2,3)	(1,3,4)	(1,4,3)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)	(1,3,2)	(1,2,4)	(1,3)(2,4)	(1)	(2,3,4)	4

Abbildung 2.7: Verknüpfungstafel zu A_4

Wie der Verknüpfungstabelle zu A_4 zu entnehmen, verfügt A_4 über die Zentralisatorschranke 4 und besitzt als einzigen nichttrivialen Normalteiler das Erzeugnis $\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle$, welches auch gleichzeitig die Kommutatorgruppe von A_4 darstellt und isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist[20]. Außerhalb von A_4' befinden sich ausschließlich Elemente der Ordnung 3, deren Zentralisator stets das eigene Erzeugnis ist (also Index 4), und die allesamt keine Normalteiler sind. A_4 ist auflösbar von Stufe 2, jedoch nicht nilpotent, da A_4 ein triviales Zentrum hat; somit enden die beiden Zentralreihen schon nach einem Schritt. Das hat im nun betrachteten Fall zur Konsequenz, dass schon mal von vornherein Nilpotenz ausgeschlossen werden kann, da G eine nicht-nilpotente Faktorgruppe besitzt.
Abschliessend gilt für A_4 noch, dass es sich, wenn $\alpha \in A_4$ ein beliebiges Element der Ordnung 2 und $\pi \in A_4$ eines der Ordnung 3 ist, durch $\langle\pi, \alpha\pi\alpha^{-1}\rangle$ erzeugen lässt.

[20]Dieses Erzeugnis $\langle(1,2)(3,4),(1,3)(2,4)\rangle$ ist übrigens gleich dem Schnitt der 2-Sylowgruppen von S_4.

All diese Eigenschaften erhält man am schnellsten durch konkretes Nachrechnen, da ja A_4 lediglich über 12 Elemente verfügt; im Folgenden ist der dazu notwendige Quellcode in Maple V.4 angegeben:

```
> with(group):
> center(permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]}));
```

permgroup(4, {[]})

```
> DerivedS(permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]}));
```

[permgroup(4, {[[1, 2, 3]], [[1, 2, 4]]}), permgroup(4, {[[1, 4], [2, 3]], [[1, 2], [3, 4]]}), permgroup(4, {[]})]

```
> LCS(permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]}));
```

[permgroup(4, {[[1, 2, 3]], [[1, 2, 4]]}), permgroup(4, {[[1, 4], [2, 3]], [[1, 2], [3, 4]]})]

```
> pg:=permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]});
sg1 := permgroup(4, {[[1,3,4]]}): NormalClosure(sg1, pg);
```

permgroup(4, {[[1, 3, 4]], [[1, 4, 2]]})

```
> sg2 := permgroup(4, {[[1,2],[3,4]]}): NormalClosure(sg2, pg);
```

permgroup(4, {[[1, 2], [3, 4]], [[1, 4], [2, 3]]})

```
> centralizer(permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]}), [[1,2,3]]);
centralizer(permgroup(4, {[[1,2,3]],[[1,2,4]]}), [[1,2],[3,4]]);
```

permgroup(4, {[[1, 2, 3]]})

permgroup(4, {[[1, 2], [3, 4]], [[1, 3], [2, 4]]})

Damit nun zum Fall einer Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, die ein Element $t \in G$ besitzt derart, dass $|G : C_G(t)| = 4$ und $|G/D(t)| = 12$ ist, was bedeutet, dass $G/D(t)$ isomorph zu A_4 ist. Auf Grund dieser Isomorphie müssen nun zwei verschiedene Elemente $x, y \in G$ existieren, so dass $ord(xD(t)) = 2 = ord(yD(t))$ und $\langle xD(t), yD(t)\rangle$ ein abelscher Normalteiler der Ordnung 4 und des Index 3 in $G/D(t)$ ist.
Analog 2.3.1 zeigt man zudem, dass sich ein beliebiges $g \in \langle x, y, D(t)\rangle$ in der Form $g = x^i y^j d$ darstellen lässt, mit $i, j \in \{0, 1\}$ und $d \in D(t)$.
Damit gilt auch wieder $\langle x, y, D(t)\rangle/D(t) = \langle xD(t), yD(t)\rangle$, und gemäß 2.3.4 ist des Weiteren $\langle x, y, D(t)\rangle$ ein Normalteiler in G. Da die Faktorgruppe $G/\langle x, y, D(t)\rangle$ abelsch ist, erzwingt dies $G' \preceq \langle x, y, D(t)\rangle$.
$\langle xD(t), yD(t)\rangle$ ist abelsch, womit $x^i D(t) \cdot y^j D(t) = y^j D(t) \cdot x^i D(t)$, also $[x^i, y^j] \in D(t)$ ist und aus diesem Grund auch $G'' \preceq D(t)$ (nicht aber G', denn $G/D(t)$ ist nicht abelsch!).
Fassen wir die bisherigen Ergebnisse zusammen:

2.6.13 Lemma Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, und gebe es ein $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = 4$ und $|G/D(t)| = 12$ ist, dann gelten:
(i) Für alle Zentralisatoren $C_G(t)$ vom Index 4, die kein Normalteiler sind, ist $G/D(t)$ isomorph zu A_4.
(ii) Es existieren $x, y \in G$ mit $\langle xD(t), yD(t)\rangle = \langle x, y, D(t)\rangle/D(t)$ isomorph zur Kleinschen Vierergruppe und normal vom Index 3 in $G/D(t)$.
(iii) Es ist $G' \preceq \langle x, y, D(t)\rangle \trianglelefteq G$, aber $G' \not\preceq D(t)$.
(iv) Es ist $G'' \preceq D(t)$.
(v) Für alle $vD(t) \in G/D(t)$ mit $ord(vD(t)) = 3$ ist $C_{G/D(t)}(vD(t)) = \langle vD(t)\rangle = \langle v, D(t)\rangle/D(t)$.

Beweis: Es bleiben nur noch (i) und (v) zu zeigen.
(i) Da G eine nicht nilpotente Faktorgruppe hat, ist G nicht nilpotent und 2.6.10 erzwingt die Behauptung.
(v) Die erste Gleichheit ist eine direkte Konsequenz aus den eingangs angeführten Eigenschaften von A_4, die zweite Gleichheit zeigt man analog 2.3.1. #

Betrachten wir nun das anfangs gewählte $t \in G$, für welches wir o.B.d.A. annehmen können, dass es nicht in $D(t)$ liegt[21]; es gilt wieder, dass $\langle t, D(t)\rangle \preceq C_G(t)$ ist; damit muss $|G : C_G(t)| = 4$ ein Teiler von $|G : \langle t, D(t)\rangle|$ sein. Da $\langle tD(t)\rangle = \langle t, D(t)\rangle/D(t)$ von Ordnung 2 oder 3 ist, ist der Index $|G : \langle t, D(t)\rangle|$ entweder 6 oder 4; es muss also $|G : \langle t, D(t)\rangle| = 4$ und damit $C_G(t) = \langle t, D(t)\rangle$ sein.
Auf Grund der Isomorphie von $G/D(t)$ und A_4 sind $\{t, xtx^{-1}, yty^{-1}, (xy)t(xy)^{-1}\}$ die vier verschiedenen Konjugierten von t und man zeigt wieder, dass $C_G(t) \not\equiv C_G(xtx^{-1})$ ist. Da sich (vgl. Aussagen zu A_4!) $G/D(t)$ erzeugen lässt durch $G/D(t) = \langle tD(t), xtx^{-1}D(t)\rangle$, ergibt sich wieder, dass $G = \langle C_G(t), C_G(xtx^{-1})\rangle$ ist. Außerdem zeigt man analog zu 2.3.10 und 2.3.11, dass für beliebiges $d \in G$ gilt, dass $C_G(td) \cap \langle x, y, D(t)\rangle = D(t)$ und $|G : C_G(td)| = 4$ ist. Analog 2.3.16 und 2.3.19 erhält man, dass $C_G(t)$, $C_G(xtx^{-1})$ und $D(t)$ abelsch sind und $D(t)$ mit dem Zentrum von G übereinstimmt. Somit gilt:

2.6.14 Lemma Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, und existiere ein $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = 4$ und $|G/D(t)| = 12$ ist, dann gelten:
(i) $C_G(t)$ ist abelsch. (ii) $D(t) = Z(G)$.
(iii) G ist auflösbar von höchstens Stufe 3.

Beweis: Es fehlt nur (iii), doch dieses ist eine direkte Konsequenz aus (ii) und 2.6.13(iv). #

Betrachten wir nun den Zentralisator $C_G(x)$: Sicherlich ist $\langle x, D(t)\rangle$ darin enthalten, da aber $|G : \langle x, D(t)\rangle| = 6$ ist, liefert die Zentralisatorschranke 4, dass $C_G(x) \succ \langle x, D(t)\rangle$ ist. Zudem ist $C_G(x)/D(t) \preceq C_{G/D(t)}(xD(t)) = \langle x, y, D(t)\rangle/D(t)$, und Letzteres hat Ordnung 4, woraus resultiert, dass $|C_G(x)/D(t)|$ als Teiler von 4 nur die Werte 2 oder 4 annehmen kann und somit $|G : C_G(x)|$ die Werte 6 oder 3; also ist $|G : C_G(x)| = 3$ und $|C_G(x)/D(t)| = 4$, d.h. es gilt:

[21] Auf Grund der Isomorphie $G/D(t) \cong A_4$ ist einerseits $C_{G/D(t)}(xD(t)) = C_{G/D(t)}(yD(t)) = \langle xD(t), yD(t)\rangle$, andererseits existiert ein $v \in G$ mit $ord(vD(t)) = 3$ so, dass $vD(t) \notin \langle xD(t), yD(t)\rangle$ ist und man analog 2.3.10 und 2.3.11 erhält, dass $C_{G/D(t)}(vD(t)) \cap \langle x, y, D(t)\rangle/D(t) = \{D(t)\}$, $C_G(v) \cap \langle x, y, D(t)\rangle \preceq D(t)$ ist und damit aus $4 = |\langle x, y, D(t)\rangle : D(t)| \leq ... \leq |G : C_G(v)| \leq 4$ schließlich $|G : C_G(v)| = 4$, $C_G(v) \cap \langle xD(t), yD(t)\rangle = D(t)$ und $C_G(v) = \langle v, D(t)\rangle$ resultiert. Da $\langle v, D(t)\rangle/D(t) = \langle vD(t)\rangle$ nicht normal in $G/D(t)$ ist (Isomorphie zu A_4), kann auch $\langle v, D(t)\rangle$ kein Normalteiler in G sein; also erfüllt dieses v alle geforderten Eigenschaften.

2.6.15 Satz Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, und existiere ein $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = 4$ und $|G/D(t)| = 12$ ist. Es existieren $x, y \in G$ so, dass $\langle x, y, D(t)\rangle/D(t)$ normal vom Index 3 in $G/D(t)$ ist und gilt:
(i) $C_G(x) = \langle x, y, Z(G)\rangle$ ist abelsch und $G/Z(G) \cong A_4$.
(ii) G ist auflösbar von Stufe 2.
(iii) $G' = \{e, [x, t], [y, t], [xy, t]\}$ und ist isomorph zur Kleinschen Vierergruppe (also Exponent 2).
(iv) $G' \cap Z(G) = \{e\}$.

Beweis: (i) Aus $C_G(x) = \langle x, y, Z(G)\rangle$ folgt, dass x und y vertauschbar sind, womit $\langle x, y, Z(G)\rangle$ abelsch ist.
(ii) Nach 2.6.13(iii) ist G' damit abelsch und es folgt $G'' = \{e\}$.
(iii) Man erhält, dass $4 = |[t, \langle x, y, D(t)\rangle]| \leq |[t, G]| = 4$ ist und kann in völliger Analogie zu den Sätzen 2.3.27 bis 2.3.29[22] schließen und erhält $|G'| = 4$. Damit folgt $G' = \{e, [x, t], [y, t], [xy, t]\}$. Da $\langle x, y, D(t)\rangle$ abelsch ist, kann 2.3.62 auf $[x, t]$ angewendet werden, und da x^2 in $Z(G)$ liegt, gilt $[x, t]^2 = [x^2, t] = e$; auf diese Weise zeigt man den Rest der Behauptung.
(iv) Da $xtx^{-1}D(t) \notin \langle tD(t)\rangle$ ist, ist $[x, t] \notin Z(G)$ und man kann (iv) zeigen. #

Interessant ist hier auch (i), besagt es doch, dass nun auf jeden Fall ein Zentralisator des Index 3 existiert, der, nebenbei bemerkt, ein Normalteiler ist.
Im Falle der Endlichkeit von G können wir nun ein einfaches Kriterium angeben, um zu entscheiden, ob G nilpotent ist oder nicht:

2.6.16 Satz Sei G eine endliche Gruppe mit Zentralisatorschranke 4.
Dann ist G nilpotent genau dann, wenn kein Zentralisator des Index 3 existiert.

Des Weiteren ist es nun möglich, eine schärfere Formulierung von 2.1.8 anzugeben:

2.6.17 Satz Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 4.
Dann gibt es einen Normalteiler des Index 3, 4 oder 8.

Beispiele zu dem zuletzt behandelten Fall wären entweder A_4 selber oder die in den nun folgenden Beispielen 2.6.18 und 2.6.19 behandelten Gruppen, wobei hier die Primzahl $p = 2$ zu wählen wäre. Alle drei Beispiele verifizieren die oben angeführten Aussagen.

2.6.18 Beispiel Sei G die Gruppe der Abbildungen $f(x) = ax + b$ mit Koeffizienten $a, b \in \mathbb{K}_{p^2}$, dem Körper mit p^2 Elementen, wobei $a \neq 0$ gelte. Dann hat G die Ordnung $p^2(p^2 - 1)$, das neutrale Element dieser Gruppe ist die Abbildung $e(x) = x$ und für die Verknüpfung zweier beliebiger Elemente $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx + d$ gilt, dass $(f \circ g)(x) = ac\, x + (ad + b)$ ist. Somit ist $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ und $(f \circ g \circ f^{-1})(x) = cx + ad + (1 - c)b$. Damit erhält man den Kommutator $[f, g]$ zu $[f, g](x) = x + (1 - c)b + (a - 1)d$, und die Wahl von $c = 1$ und $a = 0$ zeigt, dass $|G'| = p^2$ ist. Also ist G auflösbar von Stufe 2.
Betrachten wir nun den Zentralisator von g. Es liegt f in $C_G(g)$ genau dann, wenn die Gleichung $(1 - c)b + (a - 1)d = 0$ erfüllt ist; es sind also folgende Fälle zu unterscheiden:
• $c = 1, d = 0$: Dann ist f beliebig wählbar, also $g \in Z(G)$.
• $c = 1, d \neq 0$: Es ist $a = 1$ und b beliebig, also ist $|G : C_G(g)| = p^2 - 1$.
• $c \neq 1$: Es ist $b = \frac{d}{c-1}(a - 1)$ und a beliebig, also $|G : C_G(g)| = p^2$.
Also liegt die Zentralisatorschranke p^2 vor, und es ist $Z(G) = \{e\}$ trivial; somit ist G nicht

[22] Statt unterschiedlichen Potenzen w^i betrachte man Elemente $w_i \in \{e, x, y, xy\}$.

nilpotent. Sei $c \neq 1$. Da für $g(x) = 2x$ und $f(x) = x + 1$ gilt, dass $(f \circ g \circ f^{-1})(x) = 2x - 1 \notin C_G(cx) = \{ax | a \in \mathbb{K}_{p^2} \setminus \{0\}\ \}$ ist, ist $C_G(cx)$ kein Normalteiler. Sei wieder $f(x) = ax + b$ und $g(x) = cx$, dann ist $(f \circ g \circ f^{-1})(x) = cx + (1 - c)b$, womit sich $D(g) = \bigcap_{f \in G} f \circ C_G(g) \circ f^{-1} = \{e\} = Z(G)$ ergibt; deshalb ist $G/D(g) \cong G$. Da für beliebiges $f(x) = ax + b$ gilt, dass $f^k(x) = a^k x + b \sum_{j=0}^{k-1} a^j$ ist, liefert die Charakteristik p des Körpers $\mathbb{K}_{p^2}$, dass die Ordnung von f im Falle $a = 1$ und $b \neq 0$ gleich p ist, ansonsten ein Teiler von $p^2 - 1$.[23] Die p-Sylowgruppen in G sind somit vom Exponenten p.

2.6.19 Beispiel Sei p eine Primzahl, sei G die Gruppe der oberen triangulären 2x2-Matrizen über $\mathbb{K}_{p^2}$, dem Körper mit p^2 Elementen, also $G = \{\begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{K}_{p^2},\ a, c \neq 0\}$. Dann ist G von Mächtigkeit $p^2(p^2 - 1)^2$, und für zwei beliebige Matrizen A und U aus G gelten:

$$A \cdot U := \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av + bw \\ & cw \end{pmatrix},\ A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & -a^{-1}bc^{-1} \\ & c^{-1} \end{pmatrix},$$

$$AUA^{-1} = \begin{pmatrix} u & (av + b(w - u))c^{-1} \\ & w \end{pmatrix} \text{ und } [A, U] = \begin{pmatrix} 1 & vw^{-1}(ac^{-1} - 1) + bc^{-1}(1 - uw^{-1}) \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Wählt man in $[A, U]$ für $b = 0$, $w = 1$ sowie $a = 0$, so erkennt man leicht, dass

$$G' = \{\begin{pmatrix} 1 & v \\ & 1 \end{pmatrix} | v \in \mathbb{K}_{p^2}\} \text{ von Ordnung } p^2 \text{ ist.}$$

Damit ist G' abelsch und G auflösbar von Stufe 2. Betrachten wir nun den Zentralisator $C_G(U)$: Es ist $A \in C_G(U)$ genau dann, wenn $(av + b(w - u))c^{-1} = v$, also $v(a - c) + b(w - u) = 0$ gilt; zu unterscheiden sind folgende Fälle:

- $v = 0, u = w$: Nun ist A frei wählbar, also ist $U \in Z(G)$.
- $v \neq 0, u = w$: Dann muss $a = c$ gelten, womit sich der Index $|G : C_G(U)| = p^2 - 1$ ergibt.
- $u \neq w$: Jetzt ist $b = \frac{v}{u - w}(a - c)$, was den Index $|G : C_G(U)| = p^2$ bedeutet.

Es liegt deshalb wieder die Zentralisatorschranke p^2 vor, und das Zentrum dieser Gruppe erhält man zu $Z(G) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{K}_{p^2} \setminus \{0\}\ \}$; es umfasst also gerade alle Diagonalmatrizen, die sich nur um einen skalaren Faktor von der Einheitsmatrix, dem Neutralen der Gruppe, unterscheiden, und ist von Mächtigkeit $p^2 - 1$.
Sei nun $X := \begin{pmatrix} 1 & x \\ & 1 \end{pmatrix} \in G'$ beliebig gewählt, dann ist $[A, X] = \begin{pmatrix} 1 & x(ac^{-1} - 1) \\ & 1 \end{pmatrix}$, womit $[G, G'] = G'$ gilt, also G nicht nilpotent ist, da die absteigende Zentralreihe bereits nach einem Schritt endet. Betrachten wir einen Zentralisator vom Index p^2, z.B.
$C_G(\tilde{U}) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ & c \end{pmatrix} | a, c \in \mathbb{K}_{p^2} \setminus \{0\}\ \}$ für $\tilde{U} := \begin{pmatrix} u & 0 \\ & w \end{pmatrix}$ mit $u \neq w$. Es ist
$A\tilde{U}A^{-1} = \begin{pmatrix} u & bc^{-1}(w - u) \\ & w \end{pmatrix}$, womit $C_G(\tilde{U})$ offensichtlich kein Normalteiler in G ist, und sich der Schnitt der konjugierten Zentralisatoren zu $D(\tilde{U}) = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ & c \end{pmatrix} | a = c \in \mathbb{K}_{p^2} \setminus \{0\}\ \}$, also dem Zentrum $Z(G)$ ergibt. Der Index ist $|G/D(\tilde{U})| = |G/Z(G)| = p^2(p^2 - 1)$.

[23] $a^{p^2-1} = 1 \Rightarrow 0 = a^{p^2-1} - 1 = (a - 1) \sum_{j=0}^{p^2-2} a^j \Rightarrow \sum_{j=0}^{p^2-2} a^j = 0$ für $a \neq 1$

Da in $G/D(\tilde{U})$ auf der Diagonale nur die Differenzen der Einträge von Bedeutung sind, ist $G/D(\tilde{U}) \cong \{\begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{K}_{p^2},\ a \neq 0\}$. Man erhält $\begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a^k & b\sum_{j=0}^{k-1} a^j \\ & 1 \end{pmatrix}$, so dass diese Matrix im Fall $a = 1$ und $b \neq 0$ von Ordnung p, ansonsten die Ordnung ein Teiler von p^2-1 ist (Charakteristik p). Die p-Sylowgruppen in $G/D(\tilde{U})$ sind also vom Exponenten p. Dies verwundert auch nicht, da $G/D(\tilde{U})$ offensichtlich isomorph zu der in 2.6.18 betrachteten Gruppe ist; man wähle die Abbildung $\varphi(\begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix}) := \begin{pmatrix} a & b \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$.

2.6.20 Zusammenfassung Ist G eine beliebige Gruppe mit Zentralisatorschranke 4, so ist G auflösbar von Stufe 2. Des Weiteren sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:
- Sind alle Zentralisatoren vom Index 4 Normalteiler in G, so sind alle Zentralisatoren Normalteiler in G, und Letzteres ist nilpotent von Klasse 2.
- Existiere nun ein Zentralisator $C_G(t)$ vom Index 4, der kein Normalteiler ist und für den $|G/D(t)| = 8$ gilt. Dann sind alle Zentralisatoren vom Index 2 oder 3 Normalteiler, und für all jene Zentralisatoren $C_G(x)$ vom Index 4, die keine Normalteiler sind, ist $G/D(x)$ isomorph zu D_4. Die Gruppe G selber ist nun nilpotent von Klasse 3.

Für endliches G darf es in beiden erstgenannten Fällen keine Zentralisatoren des Index 3 geben, im folgenden Fall muss es dagegen einen solchen geben:
- Existiert schließlich ein Zentralisator $C_G(t)$ mit $G/D(t)$ isomorph A_4, so ist G nicht nilpotent und $D(t) = Z(G)$. Für alle nichtnormalen Zentralisatoren $C_G(x)$ vom Index 4 ist $G/D(x) \cong A_4 \cong G/Z(G)$. Des Weiteren ist G' isomorph zur Kleinschen Vierergruppe und es gibt einen normalen Zentralisator des Index 3.

Damit ist der Fall der Zentralisatorschranke 4 vollständig diskutiert und wir können uns nun dem allgemeinen Fall der Zentralisatorschranke p^2 zuwenden. Doch zuvor noch eine kleine Aussage, die aus den in den Kapiteln 2.3 und 2.6 gewonnenen Erkenntnissen direkt folgt:

2.6.21 Korollar Sei G eine nichtabelsche Gruppe mit einer Zentralisatorschranke von höchstens 5. Dann ist G auflösbar von Stufe 2.

2.7 Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2

In diesem Kapitel sollen nun Gruppen G mit Zentralisatorschranke p^2 zu einer beliebigen Primzahl p untersucht werden, für die sich leider nicht so konkrete Ergebnisse wie für den eben behandelten Spezialfall $p = 2$ herleiten lassen werden. Unser Augenmerk richtet sich in diesem Abschnitt deshalb auch hauptsächlich auf Primzahlen $p > 2$.
In völliger Analogie zum bisherigen Vorgehen wählen wir wieder ein $t \in G$ aus, dessen Zentralisator den Index p^2 hat, und bilden erneut den Durchschnitt aller konjugierten Zentralisatoren $D(t)$; die damit gebildete Faktorgruppe ist nach 2.1.7 isomorph zu einer transitiven Untergruppe von S_{p^2}, also nach 2.1.8 von der Mächtigkeit $p^2 \cdot m$, wobei m ein Teiler von $(p^2 - 1)!$ ist. Stets zu berücksichtigen ist dabei 2.1.5, welches besagt, dass jede Faktorgruppe von G eine Zentralisatorschranke von höchstens p^2 haben kann.
Genau wie im zuvor diskutierten Fall einer Zentralisatorschranke 4 lässt sich auch für $p > 2$ aus der Zentralisatorschranke p^2 keine Nilpotenz ableiten, was folgendes Beispiel demonstriert:

2.7.1 Beispiel Sei $p > 2$ eine Primzahl, sei U die Gruppe der oberen triangulären 3x3-Matrizen über $\mathbb{K}_p$, sei V der Normalteiler jener oberen triangulären 3x3-Matrizen aus U, auf deren Diagonale nur Einsen, und deren erster Nebendiagonale nur Nullen stehen, so ist $G := U/V$ von Mächtigkeit $p^2(p-1)^3$ und lässt sich darstellen in der Form

$$G = \{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & * \\ & x_2 & y_2 \\ & & x_3 \end{pmatrix} | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}_p \setminus \{0\},\ y_1, y_2 \in \mathbb{K}_p \}.$$

Man berechnet nun für zwei beliebige Gruppenmitglieder X, A:

$$X \cdot A := \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & * \\ & x_2 & y_2 \\ & & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & * \\ & a_2 & b_2 \\ & & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1x_1 & b_1x_1 + a_2y_1 & * \\ & a_2x_2 & b_2x_2 + a_3y_2 \\ & & a_3x_3 \end{pmatrix},$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} x_1^{-1} & -x_1^{-1}x_2^{-1}y_1 & * \\ & x_2^{-1} & -x_2^{-1}x_3^{-1}y_2 \\ & & x_3^{-1} \end{pmatrix},$$

$$XAX^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & ((a_2 - a_1)y_1 + b_1x_1)x_2^{-1} & * \\ & a_2 & ((a_3 - a_2)y_2 + b_2x_2)x_3^{-1} \\ & & a_3 \end{pmatrix} \text{ sowie}$$

$$[X, A] = \begin{pmatrix} 1 & x_2^{-1}y_1(1 - a_1a_2^{-1}) + a_2^{-1}b_1(x_1x_2^{-1} - 1) & * \\ & 1 & x_3^{-1}y_2(1 - a_2a_3^{-1}) + a_3^{-1}b_2(x_2x_3^{-1} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun wählt man $y_1 = y_2 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_3 = 2^{-1}$, so dass

$[X, A] = \begin{pmatrix} 1 & b_1 & * \\ & 1 & b_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ ist, was zeigt, dass $|G'| = p^2$ ist und G'' deswegen verschwindet, also G auflösbar der Stufe 2 ist.
Nun zu den Zentralisatoren: Es ist $X \in C_G(A)$ genau dann, wenn $(a_2 - a_1)y_1 + (x_1 - x_2)b_1 = 0$ und $(a_3 - a_2)y_2 + (x_2 - x_3)b_2 = 0$ gelten, was zu folgender Fallunterscheidung führt:

- $a_1 = a_2, b_1 = 0; a_2 = a_3, b_2 = 0$: Es ist X beliebig, also $A \in Z(G)$.
- $a_1 = a_2, b_1 \neq 0; a_2 = a_3, b_2 = 0$: Es ist $x_1 = x_2$, somit $|G : C_G(A)| = p - 1$.
- $a_1 = a_2, b_1 = 0; a_2 = a_3, b_2 \neq 0$: Es ist $x_2 = x_3$, somit $|G : C_G(A)| = p - 1$.
- $a_1 = a_2, b_1 \neq 0; a_2 = a_3, b_2 \neq 0$: Es ist $x_1 = x_2 = x_3$, somit $|G : C_G(A)| = (p-1)^2$.
- $a_1 \neq a_2; a_2 = a_3, b_2 = 0$: Es ist $y_1 = \frac{b_1}{a_1 - a_2}(x_1 - x_2)$, somit $|G : C_G(A)| = p$.
- $a_1 \neq a_2; a_2 = a_3, b_2 \neq 0$: Es ist $y_1 = \frac{b_1}{a_1 - a_2}(x_1 - x_2)$ und $x_2 = x_3$, somit $|G : C_G(A)| = p(p-1)$.
- $a_1 = a_2, b_1 = 0; a_2 \neq a_3$: Es ist $y_2 = \frac{b_2}{a_2 - a_3}(x_2 - x_3)$, somit $|G : C_G(A)| = p$.
- $a_1 = a_2, b_1 \neq 0; a_2 \neq a_3$: Es ist $y_2 = \frac{b_2}{a_2 - a_3}(x_2 - x_3)$ und $x_1 = x_2$, somit $|G : C_G(A)| = p(p-1)$.
- $a_1 \neq a_2; a_2 \neq a_3$: Es ist $y_1 = \frac{b_1}{a_1 - a_2}(x_1 - x_2)$ und $y_2 = \frac{b_2}{a_2 - a_3}(x_2 - x_3)$, somit $|G : C_G(A)| = p^2$.

Somit liegt die Zentralisatorschranke p^2 vor, und es ist $Z(G) = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ & a & 0 \\ & & a \end{pmatrix} | a \in \mathbb{K}_p \setminus \{0\} \}$ mit Mächtigkeit $p - 1$. Sei nun $B := \begin{pmatrix} 1 & b_1 & * \\ & 1 & b_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G'$ beliebig gewählt, so ist der Kommutator $[X, B] = \begin{pmatrix} 1 & b_1(x_1 x_2^{-1} - 1) & * \\ & 1 & b_2(x_2 x_3^{-1} - 1) \\ & & 1 \end{pmatrix}$, also $[G, G'] = G'$, womit die absteigende Zentralreihe schon nach einem Schritt endet, G also nicht nilpotent ist. Betrachten wir auch hier wieder einen beliebigen Zentralisator des Index p^2, so z.B. den für $\tilde{A} := \begin{pmatrix} 2 & 0 & * \\ & 1 & 0 \\ & & 2 \end{pmatrix}$: Es ist $C_G(\tilde{A}) = \{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & * \\ & x_2 & 0 \\ & & x_3 \end{pmatrix} | x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}_p \setminus \{0\} \}$ und $X\tilde{A}X^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -y_1 x_2^{-1} & * \\ & 1 & y_2 x_3^{-1} \\ & & 2 \end{pmatrix}$, also $C_G(\tilde{A})$ offensichtlich kein Normalteiler in G, und für Elemente in $D(\tilde{A})$ muss gerade gelten, dass die Elemente der ersten Nebendiagonale den Wert 0 annehmen, womit $D(\tilde{A}) = Z(G)$ ist mit Index $|G/D(\tilde{A})| = |G/Z(G)| = p^2(p-1)^2$. Analog 2.6.19 erhält man, dass $G/D(\tilde{A}) \cong \{ \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & * \\ & x_2 & y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} | x_1, x_2 \in \mathbb{K}_p \setminus \{0\},\ y_1, y_2 \in \mathbb{K}_p \}$ ist. Betrachten wir hier nun Elemente von p-Potenzordnung.

Allgemein ist $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & * \\ & x_2 & y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} x_1^k & y_1(x_1^{k-1} + x_1^{k-2}x_2 + ... + x_2^{k-1}) & * \\ & x_2^k & y_2(x_2^{k-1} + ... + 1) \\ & & 1 \end{pmatrix}$ für $k \geq 2$, und da die Einträge x_1, x_2 bereits bei Potenz $p-1$ zu 1 werden (und $p-1$ ist teilerfremd zu p), konzentriert sich unsere Betrachtung auf Elemente der Form $\begin{pmatrix} 1 & y_1 & * \\ & 1 & y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 & y_1 & * \\ & 1 & y_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & ky_1 & * \\ & 1 & ky_2 \\ & & 1 \end{pmatrix}$, und diese haben Ordnung p; somit hat eine p-Sylowgruppe von $G/D(\tilde{A})$ den Exponenten p.

Machen wir uns nun Gedanken zu ersten Einschränkungen bzgl. der Untergruppe $U \preceq S_{p^2}$, zu der $G/D(t)$ isomorph ist. Interessant ist hierbei nur der Fall, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler ist, sonst ist $|G/D(t)| = p^2$. Da nach 2.4.3(iii) Elemente der Ordnung p^2 ihr Erzeugnis als Zentralisator haben und in jeder p-Sylowgruppe von S_{p^2} solche Elemente enthalten sind, folgt, dass solche Elemente im Fall $p \geq 5$ dort einen Zentralisator des Index $p^{p-1} > p^2$ haben, was nicht sein darf; ergo darf U keine p-Sylowgruppe von S_{p^2} enthalten, womit U u.a. schon mal nicht A_{p^2} oder S_{p^2} selbst sein kann; des Weiteren ist p^{p+1} kein Teiler von $|G/D(t)|$.
Im Fall $p = 3$ hat nach 2.5.33 die 3-Sylowgruppe von S_9 sehr wohl die Zentralisatorschranke 3^2, allerdings scheiden auch hier A_9 und S_9 selber aus, da beispielsweise, wie man direkt nachrechnen kann, der Zentralisator $C_{A_9}(\ (1,2,4)\ ) = \langle (1,2,4),(3,5,7),(5,7,9),(7,8,9),(6,7)(8,9)\rangle$ vom Index 168 in A_9 ist.
Per Induktion zeigt man leicht, dass $\frac{(p-1)!}{2} > p^2$ für $p \geq 7$ ist, und da Elemente π von Ordnung p nach 1.5.11 in A_p als Zentralisator ihr eigenes Erzeugnis haben, ist der Index $|A_p : C_{A_p}(\pi)| = \frac{(p-1)!}{2} > p^2$, womit A_p nicht über eine Zentralisatorschranke p^2 verfügt; für $p \geq 7$ scheiden also all jene Gruppen U aus, die eine zu A_p isomorphe Untergruppe enthalten; dies sind u.a. alle alternierenden und symmetrischen Gruppen A_n bzw. S_n mit $p \leq n \leq p^2$. Da andererseits p^2 ein Teiler von $|U|$ sein muss, kommen die Gruppen A_n und S_n mit $n \leq 2p-1$ ohnehin nicht in Frage. Schließlich liefert 2.1.12 noch, dass U nicht abelsch sein darf. Fassen wir zusammen:

2.7.2 Satz Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei $t \in G$ so, dass $|G : C_G(t)| = p^2$ und $C_G(t)$ kein Normalteiler sei. Nach 2.1.7 gibt es also eine Untergruppe $U \preceq S_{p^2}$ derart, dass $G/D(t) \cong U$ ist. Es gilt:
(i) U ist nicht abelsch.
(ii) Für $p \geq 3$ ist U weder gleich A_{p^2}, noch gleich S_{p^2}.
(iii) Für $p \geq 5$ darf U keine p-Sylowgruppe von S_{p^2} enthalten; insbesondere ist p^{p+1} kein Teiler von $|U| = |G/D(t)|$, welches die Form p^2m mit $m|(p^2-1)!$ hat.
(iv) Für $p \geq 7$ darf U keine zu A_p isomorphe Untergruppe enthalten; insbesondere ist U keine alternierende oder symmetrische Gruppe.

In Kapitel 2.4 wurden jedoch noch viel weitergehende Aussagen über die p-Sylowgruppen von S_{p^2} gefunden, so dass 2.4.15, 2.4.16 und 2.1.5 eine deutliche Präzisierung von Aussage 2.7.2 zulassen:

2.7.3 Satz Es gelten die Voraussetzungen von 2.7.2. Sei U_p eine beliebige p-Sylowgruppe in U, die in der p-Sylowgruppe P von S_{p^2} gelegen sei. Seien für $2 \leq r \leq p$ die Untergruppen K_r und M_r von P definiert wie in den Sätzen 2.4.15 und 2.4.16. Es gilt für $p \geq 5$:
(i) Ist $|U_p| > p^4$, so ist U_p elementarabelsch und $|U_p| \leq p^p$.
(ii) Ist U_p nicht elementarabelsch, so ist $p^2 \leq |U_p| \leq p^4$ und für $p^3 \leq |U_p| \leq p^4$ nicht abelsch. In diesem Fall gilt:
• Hat U_p den Exponenten p, so ist U_p im Falle $|U_p| = p^4$ vom Typ K_4, und im Falle $|U_p| = p^3$ vom Typ K_3.
• Hat U_p den Exponenten p^2, so ist U_p im Falle $|U_p| = p^4$ vom Typ M_4, und im Falle $|U_p| = p^3$ vom Typ M_3.
Für $p = 3$ erhält man:
(iii) Ist $|U_3| = 3^4$, so ist U_3 isomorph zu einer 3-Sylowgruppe von S_9 (vgl. Beispiel 2.5.33), für $|U_3| = 3^3$ ist U_3 entweder elementarabelsch oder vom (nicht abelschen) Typ K_3 bzw. M_3.

Hat U_p den Exponenten p^2, so lassen sich die eben gewonnenen Aussagen nochmals verschärfen, denn in diesem Fall muss ja, wie des Öfteren schon erwähnt, gelten, dass $|U| \leq p^4$ ist, weshalb nur drei Fälle verbleiben:
Ist $|U| = p^4$, so ist U vom Typ M_4, ansonsten ist $|U| < p^4$.
Ist $|U_p| = p^3$, so ist $|U|$ von der Form mp^3 mit $1 \leq m < p$, womit 1.4.4 liefert, dass es genau eine p-Sylowgruppe in U gibt, und diese ist somit automatisch Normalteiler in U. Die Struktur von U_p ist wiederum bekannt, denn U_p ist vom Typ M_3.
Verbleibt der Fall $|U| = mp^2$ mit $1 < m < p^2$ und $ggT(p, m) = 1$. Ist $m < p$, so ist die zyklische Gruppe U_p wieder Normalteiler, also $U \preceq N_{S_{p^2}}(U_p)$, und diesen kennen wir aus 2.4.17; es ist also $m > 1$ ein Teiler von $p - 1$. Für $m > p$ kann U_p somit kein Normalteiler sein und 1.4.4 erfordert, dass m einen Teiler $k > p$ mit $k \equiv 1 \pmod p$ besitzt.
Fassen wir zusammen:

2.7.4 Satz Es gelten die Voraussetzungen von 2.7.3, zusätzlich habe U_p den Exponenten p^2 (bei $p \geq 3$). Dann gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:
(i) Ist $|U_p| = p^4$, so ist U vom Typ M_4.
(ii) Ist $|U_p| = p^3$, so ist $U_p \trianglelefteq U$ und vom Typ M_3.
(iii) Ist $|U_p| = p^2$, so ist im Fall $|U| = mp^2$ mit $1 < m < p$ die Untergruppe U_p ein Normalteiler in U und $m|p-1$, ist dagegen $p < m < p^2$, so ist U_p kein Normalteiler und es existiert ein $k > p$ mit $k \equiv 1 \pmod p$ und $k|m$.

2.7.5 Beispiel Sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke 9 und es gelten des Weiteren die Voraussetzungen und Bezeichnungen von 2.7.4. Es können folgende Fälle auftreten:
•$|U_3| = 3^4$: Dann ist $U = U_3$ vom Typ M_4.
•$|U_3| = 3^3$: Nun ist $|U| \in \{3^3, 2 \cdot 3^3\}$, U_3 in jedem Fall ein Normalteiler von U.
•$|U_3| = 3^2$: Jetzt ist $|U| = mp^2$, wobei m nach 2.7.4(iii) nur die Werte 2, 4, 7 oder 8 annehmen kann. Betrachten wir den Fall $m = 7$, dann gibt es nach 1.4.4 genau eine 7-Sylowgruppe U_7 in U, welche somit ein Normalteiler ist. Die Faktorgruppe U/U_7 ist von Ordnung 3^2, also abelsch, weshalb U' eine Untergruppe von U_7 ist. Da U nicht abelsch ist, muss $U' = U_7$ gelten, also ist U' zyklisch von Ordnung 7, womit U die Zentralisatorschranke 7 besitzt. Also gibt es ein $xD(t)$ in $G/D(t) \cong U$, dessen Zentralisator von Index 7 ist, und für dieses x gilt wegen der Zentralisatorschranke 9 und 2.7.18, dass auch $|G : C_G(x)| = 7$ ist.

Im Folgenden werden wir den Betrachtungsschwerpunkt auf die nilpotenten Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2 legen, wo sich, insbesondere im endlichen Fall, sehr starke Aussagen herleiten lassen. Betrachten wir wieder die Situation, dass ein Zentralisator $C_G(t)$ des Index p^2 existiert, der kein Normalteiler in G ist, dann gilt nachstehender

2.7.6 Satz Sei p eine Primzahl und G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Für alle nichtnormalen Zentralisatoren $C_G(t)$ des Index p^2 gilt, dass die p-Sylowgruppe von $G/D(t)$ niemals abelsch ist.

Beweis: Per Widerspruch! Sei $P/D(t)$ eine abelsche p-Sylowgruppe von $G/D(t)$, $U/D(t)$ wieder das direkte Produkt der übrigen Sylowgruppen, so dass $G/D(t) \cong U/D(t) \otimes P/D(t)$ ist. Dann ist $C_G(t)/D(t) \cong U/D(t) \otimes \tilde{P}/D(t)$ vom Index p^2 mit geeignetem $\tilde{P} \preceq G$; da aber $P/D(t)$ abelsch ist, muss $C_G(t)/D(t) \trianglelefteq G/D(t)$, also erneut $C_G(t) \trianglelefteq G$ gelten, was ein Widerspruch ist. #

2.7.7 Korollar Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, bei der ein nichtnormaler Zentralisator $C_G(t)$ des Index p^2 mit $|G/D(t)| = mp^2$, $m > 1$, und $ggT(m,p) = 1$ existiert, so ist G nicht nilpotent.

Diese Aussage wird durch Beispiel 2.7.1 illustriert.

2.7.8 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Für alle nichtnormalen Zentralisatoren $C_G(t)$ des Index p^2 gilt, dass p^3 ein Teiler von $|G/D(t)|$ ist.

Aus 2.7.6 und 2.7.3 resultiert:

2.7.9 Korollar Es gelten die Voraussetzungen von 2.7.3, zusätzlich seien G nilpotent und $p \geq 3$. Es existiere ein $t \in G$ mit $|G : C_G(t)| = p^2$ und $C_G(t) \not\trianglelefteq G$. Es gilt:
(i) $|U_p| \in \{p^3, p^4\}$.
(ii) Zu unterscheiden sind:
• Hat U_p den Exponenten p, so ist U_p im Falle $|U_p| = p^4$ $(p > 3)$ vom Typ K_4, und im Falle $|U_p| = p^3$ vom Typ K_3.
• Hat U_p den Exponenten p^2, so ist U_p im Falle $|U_p| = p^4$ vom Typ M_4 und $G/D(t) \cong U_p$, im Falle $|U_p| = p^3$ ist U_p vom Typ M_3 und $|G/D(t)| = mp^3$ mit $m|p-1$.
(iii) Stets ist U_p nicht abelsch und ein Normalteiler in U.

Beweis: Bei (ii) verbleibt noch zu zeigen, dass $m|p-1$ für $|G/D(t)| = mp^3$ gelten muss. Wegen der Nilpotenz ist aber $G/D(t) \cong U_p \otimes V$, wobei V das direkte Produkt der verbleibenden Sylowgruppen ist. Es gibt nun eine zyklische Gruppe der Ordnung p^2 in U_p, die maximal und somit normal in U_p liegt, ergo ein Normalteiler in $U_p \otimes V$ ist. Damit muss $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe des Normalisators dieses Zykels sein und 2.4.17 liefert die Behauptung.#

Eine andere Konsequenz ist zudem, dass $G/D(t)$ stets über eine Zentralisatorschranke von mindestens p verfügt, wenn $C_G(t)$ kein Normalteiler ist. Ist außerdem $|U_p| = p^4$, so erzwingt die Zentralisatorschranke p^2 zusammen mit 2.1.5 und 2.3.56, dass die übrigen Sylowgruppen von $G/D(t)$ abelsch sind.

2.7.10 Beispiel Die eben gewonnenen Ergebnisse sollen für die Primzahl $p = 3$ demonstriert und präzisiert werden. Sei also G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke 9, sei $C_G(t)$ kein Normalteiler in G und vom Index 9. Betrachten wir $G/D(t)$, wo die folgenden Fälle zu unterscheiden sind:
• Ist der Exponent der 3-Sylowgruppe von $G/D(t)$ gleich 3, so muss diese 3-Sylowgruppe vom Typ K_3 sein, da es in einer 3-Sylowgruppe von S_9 keine Untergruppe vom Typ K_4 gibt. Weil diese 3-Sylowgruppe zudem ein Normalteiler von $G/D(t)$ ist, muss $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe des Normalisators $N_{S_9}(K_3)$ sein, der sich mit Maple V.4 berechnet zu:

```
> with(group):
pg := permgroup(9, {[[2,3,4,5,6,7,8,9]],[[1,2,3]],[[1,2]]}):
sg := permgroup(9,{[[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]],
[[1,5,6],[2,3,7],[4,8,9]]}):
normalizer(pg,sg);
```

permgroup(9, {[[3, 6, 9]], [[1, 3], [4, 6], [7, 9]], [[4, 7], [5, 8], [6, 9]], [[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]], [[1, 5, 6], [2, 3, 7], [4, 8, 9]]})

```
> grouporder(permgroup(9,{[[3, 6, 9]], [[1, 3], [4, 6], [7, 9]],
[[4, 7], [5, 8], [6, 9]], [[2, 5, 8], [3, 9, 6]], [[1, 4, 7], [2, 8, 5]],
[[1, 5, 6], [2, 3, 7], [4, 8, 9]]}));
```

$$324$$

Es ist $N_{S_9}(\langle\ (1,4,7)(2,8,5)\ ,\ (2,5,8)(3,9,6)\ ,\ (1,5,6)(2,3,7)(4,8,9)\ \rangle) =$
$\langle\ (1,4,7)\ ,\ (2,5,8)\ ,\ (3,6,9)\ ,\ (1,5,6)(2,3,7)(4,8,9)\ ,\ (1,3)(4,6)(7,9)\ ,\ (4,7)(5,8)(6,9)\ \rangle$ von Ordnung $324 = 2^2 \cdot 3^4$, womit $|G/D(t)| \in \{3^3, 2\cdot 3^3, 2^2\cdot 3^3\}$ ist.[24]

• Ist der betrachtete Exponent dagegen 9, so ist die 3-Sylowgruppe von $G/D(t)$ entweder vom Typ M_3, damit $G/D(t)$ von Ordnung 3^3 bzw. $2\cdot 3^3$, oder vom Typ M_4, also $G/D(t)$ von Mächtigkeit 3^4.

In einem nächsten Schritt wollen wir uns Gedanken machen darüber, wo sich Elemente mit zu p teilerfremder Ordnung in der Gruppe befinden. Doch zuvor benötigen wir eine Aussage, die in Hall [1], Seite 154, gezeigt wird und allgemein in nilpotenten Gruppen gilt:

2.7.11 Lemma In einer nilpotenten Gruppe gilt:
(i) Jede echte Untergruppe ist echte Untergruppe ihres Normalisators.
(ii) Eine Untergruppe ist maximal genau dann, wenn sie von primem Index ist.
Maximale Untergruppen sind normal und enthalten zudem die Kommutatorgruppe.

2.7.12 Satz Sei p eine Primzahl und G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Es gilt:
(i) Alle Elemente primer Ordnung $q > p^2$ liegen im Zentrum von G.
(ii) Sei G zusätzlich nilpotent. Alle Elemente $x \in G$ mit zu p teilerfremder Ordnung liegen in jedem Zentralisator des Index p oder p^2.

Beweis: (i) Per Widerspruch! Sei $ord(x) = q > p^2$ und $x \notin Z(G)$, dann existiert ein Zentralisator $C_G(t)$ aus G, so dass $x \notin C_G(t)$ ist. Da x von primer Ordnung ist, darf kein x^k für $1 \le k \le q-1$ in $C_G(t)$ liegen (sonst wäre $\langle x\rangle \preceq C_G(t)$) und es resultiert, dass $\{C_G(t), xC_G(t), ..., x^{q-1}C_G(t)\}$ genau q verschiedene Nebenklassen von $C_G(t)$ in G sind. Damit wäre aber $|G : C_G(t)| \ge q > p^2$, was der Zentralisatorschranke p^2 widerspricht.
(ii) Sei $C_G(g) \trianglelefteq G$ ein Zentralisator des Index p oder p^2, sei $x \in G$ mit $ggT(ord(x), p) = 1$. Wäre $x \notin C_G(g)$, so wäre $xC_G(g)$ eine nichttriviale Nebenklasse von $C_G(g)$, deren Ordnung durch p teilbar wäre; also wäre auch $ord(x)$ durch p teilbar, was ein Widerspruch ist.
Betrachten wir nun einen nichtnormalen Zentralisator $C_G(g)$ des Index p^2, dessen Normalisator N nach 2.7.11 vom Index p und somit normal in G ist. Zudem ist $C_G(g)$ normal vom Index p in N. Damit kann x aber kein Element aus $N \setminus C_G(g)$ sein, da $N/C_G(g)$ zyklisch von Ordnung p ist, wiederum aber auch nicht in $G \setminus N$, da auch G/N zyklisch von Ordnung p ist. Also gilt auch hier, dass $x \in C_G(g)$ ist. #

Bei nilpotenten Gruppen liegen also Elemente mit zu p teilerfremder Ordnung „nahe“ am Zentrum.
Außerdem folgt aus 2.7.11, dass der Normalisator eines nicht normalen Zentralisators des Index p^2 vom Index p und somit normal ist, weshalb man als Präzisierung von 2.1.8 erhält:

[24] Nach 2.5.33 ist $\langle\ (1,4,7)(2,8,5)\ ,\ (2,5,8)(3,9,6)\ \rangle$ die Kommutatorgruppe der 3-Sylowgruppe $\langle\ (1,2,3,4,5,6,7,8,9)\ ,\ (1,4,7)\ \rangle$ von S_9 und $(1,4,7)(2,5,8)(1,2,3,4,5,6,7,8,9) = (1,5,6)(2,3,7)(4,8,9)$ ein geeignetes Element der Ordnung p, um gemäß 2.4.6 und 2.4.15 eine Untergruppe vom Typ K_3 zu erzeugen.

2.7.13 Satz Sei p eine Primzahl und G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Dann gibt es einen Normalteiler des Index p oder p^2.

Bei den weiteren Überlegungen soll das Hauptaugenmerk auf die „übrigen“ Primzahlen gerichtet werden, womit insbesondere gemeint ist, ob es neben Zentralisatoren des Index p auch welche eines anderen primen Index geben darf. Zuvor eine Aussage, wie wir sie in Huppert [4], Seite 8, finden:

2.7.14 Lemma Sei G eine Gruppe, seien U und V Untergruppen von endlichem Index in G. Sind $|G:U|$ und $|G:V|$ teilerfremd, so ist $|G:(U \cap V)| = |G:U| \cdot |G:V|$.

2.7.15 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe, sei p eine beliebige Primzahl und $C_G(g)$ ein Zentralisator des Index p. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(n,p) = 1$ und $h \in G$ so, dass $|G : C_G(h)| = n$ ist.
Dann ist n ein Teiler von $|G : C_G(gh)|$, was äquivalent zu $|G : C_G(gh)| \in \{n, np\}$ ist.

Beweis: Nach 2.7.14 ist $|G : (C_G(g) \cap C_G(h))| = np$, also der Index des Zentralisators $C_G(gh) \succeq C_G(g) \cap C_G(h)$ ein Teiler von np.
Ist $C_G(gh) \preceq C_G(g)$, so ist $C_G(gh) = C_G(gh) \cap C_G(g) \preceq C_G(h)$ (der alte Trick: $h = g^{-1} \cdot (gh)$), womit resultiert, dass $n = |G : C_G(h)|$ ein Teiler von $|G : C_G(gh)|$ ist.
Sei nun $C_G(gh) \npreceq C_G(g)$, dann ist $G = C_G(gh)C_G(g)$, da $C_G(g)$ eine maximale Untergruppe in G ist, und mit 1.3.2 erhält man $p = |G/C_G(g)| = |C_G(gh)/(C_G(gh) \cap C_G(g))|$. Ergo ist $|G : (C_G(gh) \cap C_G(g))| = p \cdot |G : C_G(gh)|$, und da $C_G(gh) \cap C_G(g) \preceq C_G(h)$ gilt, muss erneut $n = |G : C_G(h)|$ ein Teiler von $|G : (C_G(gh) \cap C_G(g))| = p \cdot |G : C_G(gh)|$ sein, was ein weiteres Mal bedeutet, dass n den Index $|G : C_G(gh)|$ teilt. Somit ist alles gezeigt. #

2.7.16 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe, sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $y_1, ..., y_n \in G$ so, dass für alle $i = 1, ..., n$ stets $|G : C_G(y_i)| = p_i$ gilt, wobei $p_1, ..., p_n$ unterschiedliche Primzahlen seien.
Dann gilt: $C_G(y_1 \cdots y_n) = C_G(y_1) \cap ... \cap C_G(y_n)$,
womit insbesondere $G' \preceq C_G(y_1 \cdots y_n) \trianglelefteq G$ und $|G : C_G(y_1 \cdots y_n)| = p_1 \cdots p_n$ ist.

Beweis: Per Induktion nach n. Für $n = 1$ folgt die Behauptung aus 2.7.11(ii), was als Induktionsanfang dient. Sei die Aussage also für alle $j \leq n$ gezeigt. Betrachten wir $j = n + 1$: Sicher gilt $C_G(y_1) \cap ... \cap C_G(y_{n+1}) \preceq C_G(y_1 \cdots y_{n+1})$, womit der Index $|G : C_G(y_1 \cdots y_{n+1})|$ ein Teiler von $p_1 \cdots p_{n+1}$ ist, denn dies ist nach 2.7.14 der Index von $C_G(y_1) \cap ... \cap C_G(y_{n+1})$. Gemäß 2.7.15 ist nun einerseits $|G : C_G(y_1 \cdots y_n)|$ ein Teiler von $|G : C_G(y_1 \cdots y_n \cdot y_{n+1})|$, andererseits aber auch $|G : C_G(y_2 \cdots y_{n+1})|$ ein Teiler von $|G : C_G(y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n+1})|$, womit $p_1 \cdots p_{n+1}$ ein Teiler von $|G : C_G(y_1 \cdots y_{n+1})|$ ist.
Ergo ist $|G : C_G(y_1 \cdots y_{n+1})| = p_1 \cdots p_{n+1}$, weshalb $C_G(y_1 \cdots y_{n+1}) = C_G(y_1) \cap ... \cap C_G(y_{n+1})$ resultiert. Da zudem G' in jedem der Zentralisatoren $C_G(y_i)$ enthalten ist, folgt der Rest der Behauptung. #

2.7.17 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Sei $I := \{|G : C_G(g)| \; |g \in G\}$ die Menge der auftretenden Zentralisatorindizes (welche maximal von Ordnung p^2 ist), und seien $p_1, ..., p_n$ alle vorkommenden Primzahlen aus I.
Dann muss $p_1 \cdots p_n < p^2$ gelten. Insbesondere erhält man:
Existiert ein Zentralisator $C_G(t)$ vom Index p, so müssen alle übrigen primen Indizes echt kleiner als p sein.

Doch wann gibt es einen Zentralisator des Index p? Zwingend existieren muss nur ein Zentralisator des Index p^2. Trotzdem werden wir eine ebensolche Aussage herleiten können. Beschränken wir uns vorläufig auf den Fall, dass alle Zentralisatoren des Index p^2 keine Normalteiler sind, dann sind gemäß 2.7.11 ihre Normalisatoren vom Index p, und insbesondere auch die Zentralisatoren vom Index p im Normalisator. Wenn nun also ein Element $y \in G$ existiert, welches über einen primen Index $q \neq p$ verfügt, so stellt sich die Frage, ob es dann im Normalisator liegen muss; eine Antwort geben die folgenden Lemmata:

2.7.18 Lemma Sei G eine Gruppe, N ein beliebiger Normalteiler von endlichem Index in G, sei $x \in G$ so, dass $|G : C_G(x)| < \infty$ ist. Dann gelten:
(i) Für $x \in N$ gilt: $|N : C_N(x)|$ teilt $|G : C_G(x)|$.
(ii) $|G/N : C_{G/N}(xN)|$ teilt $|G : C_G(x)|$.

Beweis: (i) Nach Definition des Zentralisators, 1.1.8 und 1.3.2 gilt:
$|N : C_N(x)| = |N : (N \cap C_G(x))| = \frac{|G:(N \cap C_G(x))|}{|G/N|} = |G : C_G(x)| \frac{|C_G(x)/(N \cap C_G(x))|}{|G/N|}$
$= |G : C_G(x)| \frac{|C_G(x)N/N|}{|G/N|} = \frac{|G:C_G(x)|}{|G:C_G(x)N|}$, womit Aussage (i) resultiert.
(ii) $|G/N : C_G(x)N/N|$ ist ein Teiler von $|G : C_G(x)|$ wegen

$$|G/N : C_G(x)N/N| = \frac{|G/N|}{|C_G(x)N/N|} = \frac{|G/N|}{|C_G(x)/(C_G(x) \cap N)|} = \frac{|G/N| \cdot |G : C_G(x)|}{|G : (C_G(x) \cap N)|} = \frac{|G : C_G(x)|}{|N : (C_G(x) \cap N)|}.$$

Da $C_G(x)N/N$ eine Untergruppe von $C_{G/N}(xN)$ ist, muss der Index von $C_{G/N}(xN)$ den von $C_G(x)N/N$ teilen. Damit folgt die Behauptung. #

2.7.19 Lemma Sei p eine Primzahl, sei G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Sei $q \neq p$ eine Primzahl, sei $C_G(x)$ ein beliebiger, nicht normaler Zentralisator des Index p^2. Dann gilt für alle $y \in G$ mit $|G : C_G(y)| = q$:
Ist $y \notin N := N_G(C_G(x))$, so ist $y^p \in N$ mit $|G : C_G(y^p)| = q$.

Beweis: Sei $y \notin N := N_G(C_G(x))$. Es ist G/N eine Faktorgruppe der Ordnung p, die sich über yN erzeugen lassen muss; somit resultiert $y^p \in N$.
Nach 2.1.10(v) gilt nun $|G : C_G(y^p)| \in \{1, q\}$. Nehmen wir an, es wäre $|G : C_G(y^p)| = 1$, dann wäre $y^p \in Z(G)$ und $\langle yD(x) \rangle$ wäre eine zyklische Gruppe der Ordnung p in $G/D(x)$. Auf Grund der Nilpotenz ist $G/D(x) \cong U/D(x) \otimes P/D(x)$, wobei $P/D(x)$ die einzige p-Sylowgruppe in $G/D(x)$ darstellt, $U/D(x)$ wieder das direkte Produkt der übrigen Sylowgruppen. Somit muss $\langle yD(x) \rangle \preceq P/D(x)$ gelten, also ist insbesondere $yD(x) \in P/D(x)$.
Nach 2.7.18(ii) ist der Index des Zentralisators $C_{G/D(x)}(yD(x))$ gleich 1 oder q.
Angenommen, es wäre $|G/D(x) : C_{G/D(x)}(yD(x))| = 1$, dann wäre $yD(x) \in Z(G/D(x))$ und somit $[y, g] \in D(x)$ für alle $g \in G$, also insbesondere auch $[y, c] \in D(x) \preceq C_G(x)$ für alle $c \in C_G(x)$; hiermit wäre aber $y \in N$, was ein Widerspruch ist.
Also ist $|G/D(x) : C_{G/D(x)}(yD(x))| = q$. Andererseits ist jedoch
$C_{G/D(x)}(yD(x)) \cong C_{U/D(x) \otimes P/D(x)}(\binom{D(x)}{yD(x)}) = U/D(x) \otimes C_{P/D(x)}(yD(x))$, welches nur die Indizes 1, p oder p^2 annehmen kann, was erneut einen Widerspruch liefert.
Ergo ist $|G : C_G(y^p)| = q$ und alle Aussagen sind gezeigt. #

2.7.20 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, in der ein nichtnormaler Zentralisator des Index p^2 existiert. Sei $I := \{|G : C_G(g)| \; |g \in G\}$ die Menge der auftretenden Zentralisatorindizes, und seien $p_1, ..., p_n$ alle vorkommenden Primzahlen ungleich p aus I.
Dann muss $p_1 \cdots p_n < p$ gelten.

Beweis: Sei $C_G(x)$ ein nichtnormaler Zentralisator des Index p^2, sei N sein Normalisator, der von Index p in G ist. Seien $y_1, ..., y_n \in G$ so, dass $|G : C_G(y_i)| = p_i$ gilt für alle $i = 1, ..., n$. Nach vorigem Lemma können wir o.B.d.A. annehmen, dass $y_1, ..., y_n \in N$ erfüllt ist. Somit ist für alle $i = 1, ..., n$ stets (vgl. 2.7.14)

$$|N : C_N(y_i)| = \frac{|G : N \cap C_G(y_i)|}{|G : N|} = \frac{|G : N| \cdot |G : C_G(y_i)|}{|G : N|} = p_i,$$

und nach 2.7.16 ist $|N : C_N(xy_1 \cdots y_n)| = pp_1 \cdots p_n$, was p^2 nicht überschreiten darf; somit folgt die Behauptung. #

Für den Fall, dass ein Zentralisator des Index p^2 existiert, der ein Normalteiler ist (dies ist z.B. erfüllt, wenn G nilpotent von Klasse 2 ist), lässt sich diese Aussage noch verschärfen:

2.7.21 Lemma Sei G eine nilpotente Gruppe, sei p eine beliebige Primzahl und $C_G(g)$ ein normaler Zentralisator des Index p^k, $k \in \mathbb{N}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(n, p) = 1$ und $h \in G$ so, dass $|G : C_G(h)| = n$ ist.
Dann ist n ein Teiler von $|G : C_G(gh)|$.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von 2.7.15.
Betrachten wir nur den Fall, dass $C_G(gh) \not\leq C_G(g)$ ist, dann ist $C_G(g) \prec C_G(gh)C_G(g) \preceq G$ und ergo $|C_G(gh)C_G(g)/C_G(g)| \in \{p, ..., p^k\}$.
Somit liefert 1.3.2, dass $|C_G(gh)/(C_G(gh) \cap C_G(g))| \in \{p, ..., p^k\}$ und analog 2.7.15 folgt die Behauptung. #

2.7.22 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine nilpotente Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2. Sei $C_G(x) \trianglelefteq G$ ein Zentralisator vom Index p^2. Dann gilt:
Es gibt keinen Zentralisator $C_G(y)$ in G so, dass $|G : C_G(y)| = q$ mit einer Primzahl $q \neq p$ ist.

Beweis: Per Widerspruch! Sei $|G : C_G(y)| = q \neq p$, dann ist $C_G(y) \trianglelefteq G$ und 2.7.21 liefert, dass p^2 ein Teiler von $|G : C_G(xy)|$ ist. Andererseits ist auch $C_G(x)$ ein Normalteiler nach Voraussetzung, so dass q ein Teiler von $|G : C_G(xy)|$ sein muss. Somit ist p^2q ein Teiler von $|G : C_G(xy)|$.
Ergo gibt es einen Zentralisator, dessen Index echt größer als p^2 ist, was der Zentralisatorschranke p^2 widerspricht. Es folgt die Behauptung. #

2.7.23 Korollar Sei p eine Primzahl, sei G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, die zudem nilpotent von Klasse 2 sei. Dann gilt:
Es gibt keine Zentralisatoren mit zu p teilerfremdem Index.
Eine äquivalente Formulierung ist: Für alle $g \in G \setminus Z(G)$ ist $|G : C_G(g)| \in \{k \cdot p | 1 \leq k \leq p\}$.

Beweis: Sei $C_G(g)$ ein Zentralisator des Index p^2, sei $|G : C_G(h)| = n \in \mathbb{N}$, $ggT(n, p) = 1$. Nach 2.7.21 ist n ein Teiler von $|G : C_G(gh)|$.

Andererseits ist $|C_G(gh)C_G(h)/C_G(h)| = |C_G(gh)/(C_G(gh) \cap C_G(h))|$ ein Teiler vom Index $|G : C_G(h)| = n$, also $|G : (C_G(gh) \cap C_G(h))|$ ein Teiler von $n \cdot |G : C_G(gh)|$.
Weil $C_G(g) \succeq C_G(gh) \cap C_G(h)$ gilt, muss aber zudem $p^2 = |G : C_G(g)|$ ein Teiler vom Produkt $n \cdot |G : C_G(gh)|$ sein, was zur Konsequenz hat, dass $np^2 = |G : C_G(gh)|$ ist. Dies ist jedoch durch die Zentralisatorschranke p^2 verboten! #

2.7.24 Beispiel Ist G eine nilpotente Gruppe von Zentralisatorschranke 4 (wie sie im vorigen Kapitel erörtert wurde), so liefern die Aussagen 2.7.20 und 2.7.22, dass kein Zentralisator des Index 3 existieren darf; in 2.6.12 hatten wir dies nur für den Fall der Endlichkeit gezeigt. Somit gilt nach 2.7.12, dass Elemente ungerader Ordnung stets im Zentrum von G liegen.
Hat nun G die Zentralisatorschranke 9 und ist nilpotent von Klasse 2, so darf es gemäß 2.7.23 höchstens Zentralisatoren der Indizes 1, 3, 6 und 9 geben, wobei nur welche vom Index 1 oder 9 tatsächlich vorhanden sein müssen.
Viel eindrucksvoller ist das Ergebnis von 2.7.23 jedoch, wenn man bedenkt, dass allgemein bei Nilpotenz von Klasse 2 und Zentralisatorschranke p^2 an Stelle von p^2 denkbaren Zentralisatorindizes nur $p + 1$ Möglichkeiten verbleiben.

Diese mühsam erarbeiteten Einschränkungen für den allgemeinen nilpotenten Fall erscheinen trivial, wenn man neben Nilpotenz auch Endlichkeit voraussetzt.
Beginnen wir mit einer Analyse der endlichen nilpotenten Gruppen mit Zentralisatorschranke p^2, die wir wieder aus 2.3.56, 2.1.1(iv) und 2.2.1 ableiten:

2.7.25 Satz Sei p eine Primzahl, sei G eine endliche Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G nilpotent. Dann ist G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.
Die p-Sylowgruppe von G hat die Zentralisatorschranke p^2, die übrigen Sylowgruppen sind abelsch.

Doch diese Aussagen lassen sich noch deutlich verschärfen: Aus 2.5.10 und 2.5.32 ist uns bekannt, dass G entweder von Klasse 2 oder Klasse 3, in jedem Fall auflösbar von Stufe 2 ist. Weiterhin können nur Zentralisatoren vom Index 1, p oder p^2 auftreten, wobei die vom Index 1 und p automatisch Normalteiler in G sind (all' dies folgt allein daraus, dass G direktes Produkt seiner Sylowgruppen ist, und die einzige nichtabelsche Sylowgruppe in Kapitel 2.5 genauestens analysiert wurde). Bildet man schließlich für ein $t \in G$ mit Index $|G : C_G(t)| = p^2$ wieder den Normalteiler $D(t)$, so ist zudem die Struktur der Faktorgruppe $G/D(t)$ nach 2.5.36 detailliert bekannt:

2.7.26 Satz Sei $p > 2$ eine Primzahl, sei G eine endliche Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2, sei G nilpotent. Dann existieren nur Zentralisatoren des Index 1, p oder p^2, und die vom Index 1 und p sind Normalteiler in G. Zudem ist G auflösbar von Stufe 2 und es gelten:
(i) G ist von Klasse 2 genau dann, wenn alle Zentralisatoren vom Index p^2 Normalteiler sind.
(ii) G ist von Klasse 3 genau dann, wenn es ein $t \in G$ gibt so, dass $C_G(t)$ kein Normalteiler in G ist. In diesem Fall ist $|G : C_G(t)| = p^2$ und $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe einer p-Sylowgruppe von S_{p^2} vom Typ K_3 oder M_3 (vgl. zur Definition die Sätze 2.4.15 und 2.4.16), es gilt also insbesondere: $|G/D(t)| = p^3$, $G/D(t)$ hat Klasse 2 und Zentralisatorschranke p.
(iii) G' ist von Ordnung p^2 oder p^3.

Beweis: Es fehlt nur noch Aussage (iii), da jedoch G das direkte Produkt seiner Sylowgruppen und nur die p-Sylowgruppe nicht abelsch ist, folgt diese Aussage aus 2.5.51. #

Ähnlich wie bei der Zentralisatorschranke 4 gibt es also bei einer endlichen Gruppe G mit Zentralisatorschranke p^2 wieder ein einfaches Kriterium, um zu entscheiden, ob G nilpotent ist: Gibt es einen Zentralisator, der nicht vom Index 1, p oder p^2 ist, bzw. gibt es ein $D(g)$, dessen Faktorgruppe nicht von Ordnung 1, p, p^2 oder p^3 ist, so kann G nicht nilpotent sein. Man verifiziert diese Aussage leicht an den Beispielen 2.6.18, 2.6.19 und 2.7.1.
Aus 2.1.5(iv) lässt sich aber noch eine weitere Aussage gewinnen: Sind G_1 und G_2 Gruppen mit Zentralisatorschranke p, so verfügt ihr direktes Produkt $G := G_1 \otimes G_2$ über die Zentralisatorschranke p^2. Allerdings ist G im Allgemeinen nicht nilpotent, man bedenke den Fall, wenn G_1 oder G_2 nicht nilpotent ist. Ein konkretes Beispiel wäre $D_3 \otimes D_3$. Sicherlich ist G dagegen auflösbar von Stufe 2 und besitzt eine Kommutatorgruppe der Ordnung p^2 und des Exponenten p, was direkt aus 1.1.16 und 2.3.54 folgt. Halten wir diese Ergebnisse fest:

2.7.27 Beispiel Sei p eine Primzahl, seien G_1 und G_2 Gruppen mit Zentralisatorschranke p. Dann hat $G := G_1 \otimes G_2$ die Zentralisatorschranke p^2, es ist $|G'| = p^2$, G somit auflösbar von Stufe 2, und G' hat den Exponenten p.

2.7.28 Zusammenfassung Ist G eine Gruppe mit Zentralisatorschranke p^2 zu einer Primzahl p, und $C_G(t)$ ein nichtnormaler Zentralisator des Index p^2, so ist $G/D(t)$ isomorph zu einer Untergruppe U von S_{p^2}, wobei für eine beliebige p-Sylowgruppe U_p gelten muss, dass sie im Fall $p = 3$ höchstens von Ordnung p^4 ist, für $p > 3$ maximal von Ordnung p^p; dabei ist U_p elementarabelsch oder von Ordnung p^2, p^3 oder p^4.
Verfügt $G/D(t)$ gar über den Exponenten p^2, so ist $G/D(t)$ maximal von Ordnung p^4, die zug. p-Sylowgruppen der Ordnung p^2, p^3 oder p^4.
Diese Aussagen lassen sich verschärfen, wenn Nilpotenz vorausgesetzt wird: In diesem Fall ist die p-Sylowgruppe von $G/D(t)$ von Ordnung p^3 oder p^4.
Des Weiteren liegen in diesem Fall Elemente mit zu p teilerfremder Ordnung in jedem Zentralisator des Index p oder p^2.
Existiert in einer nilpotenten Gruppe G mit Zentralisatorschranke p^2 ein nichtnormaler Zentralisator des Index p^2, so muss dass Produkt aller vorkommenden, von p verschiedenen primen Zentralisatorindizes kleiner als p sein, gibt es einen normalen Zentralisator des Index p^2, so dürfen gar keine Zentralisatoren mit primem Index ungleich p vorkommen. Im Falle von Nilpotenz der Klasse 2 lässt sich dies noch dahingehend verschärfen, dass es keine Zentralisatoren mit zu p teilerfremdem Index geben darf.
Die stärksten Aussagen erhält man jedoch, wenn G nilpotent und endlich ist. Dann kann G in das direkte Produkt seiner Sylowgruppen zerlegt werden, und die einzige nichtabelsche Sylowgruppe, die p-Sylowgruppe, besitzt die Zentralisatorschranke p^2 und wurde zudem ausführlich in Kapitel 2.5 charakterisiert. Somit erhält man in diesem Fall:
G besitzt nur Zentralisatoren des Index 1, p oder p^2. Entweder ist G von Klasse 2, oder es existiert ein nichtnormaler Zentralisator des Index p^2 und G ist von Klasse 3. Stets ist G auflösbar von Stufe 2 und besitzt eine Kommutatorgruppe der Ordnung p^2 oder p^3.

2.8 Ein Ausblick

Das in dieser Arbeit behandelte Thema von Gruppen einer vorgegebenen Zentralisatorschranke lässt sich natürlich weit über den Fall einer primen Zentralisatorschranke, oder eines Primquadrats als Zentralisatorschranke, ausdehnen.
Aufbauend auf Kapitel 2.3, in welchem prime Zentralisatorschranken untersucht wurden, könnte man zum Beispiel die Frage nach Zentralisatorschranken der Form $p \cdot q$, oder noch allgemeiner $p_1 \cdots p_r$ mit unterschiedlichen Primzahlen p, q bzw. $p_1, ..., p_r$ stellen.
Leicht beantworten lässt sich erneut der Fall, wenn ein solches G mit Zentralisatorschranke $p_1 \cdots p_r$ endlich und nilpotent ist, denn dann gilt wieder gemäß 2.3.56, dass G isomorph zum direkten Produkt seiner Sylowgruppen ist; bezeichnet P_α dabei p_α-Sylowgruppe, so ist $G \cong P_1 \otimes ... \otimes P_r \otimes P_{r+1} \otimes P_s$, wobei $P_1, ..., P_r$ jeweils über die Zentralisatorschranke $p_1, ..., p_r$ verfügen, die $P_{r+1}, ..., P_s$ dagegen abelsch sind. $P_1, ..., P_r$ sind uns hinlänglich bekannt:
Nach den Ergebnissen aus Kapitel 2.3 gilt für solche p_α-Sylowgruppen P_α, dass sie nilpotent von Klasse 2 und ihre Kommutatorgruppen zyklisch von Ordnung p_α sind. Somit ist auch G nilpotent von Klasse 2 (sowie auflösbar von Stufe 2), und für seine Kommutatorgruppe G' gilt, dass $|G'| = p_1 \cdots p_r$ ist.[25]

Umgekehrt ist es uns möglich, (auflösbare) Gruppen mit beliebiger Zentralisatorschranke $p_1^{n_1} \cdots p_t^{n_t}$ zu konstruieren, die entweder nicht nilpotent oder nilpotent der Klassen 2 bzw. 3 sind. Dies geschieht (unter Zuhilfenahme von Aussage 2.1.5) mittels direktem Produkt geeigneter Gruppen von primer Zentralisatorschranke bzw. Primquadrat-Zentralisatorschranke.

Schließlich wäre noch der Fall von Gruppen, deren Zentralisatorschranke eine beliebige Primpotenz ist, von äußerstem Interesse, ließe sich doch darauf mittels Primfaktorzerlegung eine Aussage für beliebige Zentralisatorschranken aufbauen.

Alles in allem bietet diese Thematik somit noch genügend Raum für weitere Untersuchungen, deren Grundstein mit dieser Arbeit gelegt werden sollte.

[25] Es gilt auch die Umkehrung: Ist G endlich und nilpotent und verfügt zudem über eine Kommutatorgruppe von Ordnung $p_1 \cdots p_r$, so erzwingt 2.3.56, dass die zug. p_α-Sylowgruppen die Zentralisatorschranke p_α haben und somit alles Weitere folgt.

Literaturverzeichnis

[1] Marshall Hall, Jr.: *The Theory Of Groups*. The Macmillan Company, New York (1959).

[2] Hermann Heineken: *Engelsche Elemente der Länge 3*. Illinois J. Math. 5 (1961), S. 681-707.

[3] Hermann Heineken: *Über ein Levisches Nilpotenzkriterium*. Arch. Math. 12 (1961), S. 176-178.

[4] Bertram Huppert: *Endliche Gruppen I*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1967).

[5] F. W. Levi: *Groups in which the commutator operations satisfy certain algebraic conditions*. J. Indian Math. Soc. 6 (1933), S. 87-97.

[6] Kurt Meyberg: *Algebra 1*. Carl Hanser Verlag, München Wien (1975).

[7] Helmut Wielandt: *Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen*. Math. Zeit. 45 (1939), S. 209-244.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Diplomarbeit nach einem Thema von Herrn Prof. Dr. Hermann Heineken am Mathematischen Institut der Universität Würzburg eigenständig angefertigt und keine anderen als die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen verwendet habe.

Würzburg, im Juli 2002

Christian Weiß